Guido Pinkernell
Florian Schacht (Hrsg.)

Digitales Lernen im Mathematikunterricht

Herbsttagung
vom 22. bis 24. September 2017
an der Pädagogischen Hochschule
Heidelberg

Arbeitskreis Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge in der GDM

Guido Pinkernell
Florian Schacht (Hrsg.)

Digitales Lernen im Mathematikunterricht

Arbeitskreis
Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge
in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

Herbsttagung
vom 22. bis 24. September 2017 an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg

1. Auflage Februar 2018
Veröffentlicht im Verlag Franzbecker
Hildesheim

ISBN 978-3-88120-140-7

Guido Pinkernell, Florian Schacht (Hrsg.)

Digitales Lernen im Mathematikunterricht

Arbeitskreis Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge
in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

Herbsttagung
vom 22. bis 24. September 2017
an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg

www.franzbecker.de

Vorwort

Mit ihrer „Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft“ formulieren Bund und Länder das Ziel, Bildung unter den Bedingungen und Möglichkeiten einer digital geprägten Welt neu zu fassen (BMBF, 2016; KMK, 2016). Das ist zu begrüßen, denn angesichts der ubiquitären Präsenz von Computer, Tablet, Smartphone und Co. in der Alltags- und Lebenswelt unserer Schülerinnen und Schüler geht es nicht mehr darum, ob digitale Medien genutzt werden sollen, sondern um das Wie. Diesbezüglich formulieren Bund und Länder in ihren Strategiepapieren allerdings primär medienpädagogische und -didaktische Ziele. Diese müssen – so hält es auch die GDM in ihrem Positionspapier zur Bildungsoffensive fest (GDM, 2017) – um spezifisch fachdidaktische Ziele ergänzt werden: „Zusammenfassend formulieren wir für die digitale Kompetenz der Fachlehrkraft in Ergänzung zum Primat des Pädagogischen ein Primat des Fachdidaktischen: Der Einsatz digitaler Medien für den Fachunterricht ist immer auch daran zu messen, inwieweit er den verständigen Zugang zu mathematischen Begriffen und Verfahren befördert und festigt. Die Auflistung der digitalen Kompetenzen für Lehrkräfte im Strategiepapier der KMK (S. 25 f.) bleibt mit dem Blick auf den gesamten Fächerkanon fachunspezifisch. Durch die fachdidaktische Perspektive erhalten die dort formulierten medienpädagogischen und -didaktischen Kompetenzen eine notwendige Ergänzung für das fachliche Lehren und Lernen. In diesem Sinne fordert die GDM das BMBF und die Länder dazu auf, in den kommenden Ausschreibungen die fachdidaktische Expertise sichtbar mit einzufordern.“ (GDM, 2017, S. 41)

Die Herbsttagung 2017 des Arbeitskreises Mathematikunterricht und digiale Werkzeuge vom 22. bis zum 24. September 2017 an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg hat erste Überlegungen auf dem Weg zu einer fachspezifischen Ausdifferenzierung digitaler medien- und werkzeugbezogener Kompetenzen gemacht. In drei Arbeitsgruppen diskutierten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer Potenzial und Wirkungen der Digitalisierung auf die (1) Lehrkräfteaus- und -fortbildung, (2) Beziehung zwischen der Verwendung spezifischer Eigenschaften digitaler Medien und Kognition bzw. Kommunikation sowie auf (3) die Vermittlung von Inhalts- und

Prozesskompetenzen im Mathematikunterricht. Die Ergebnisse finden sich in drei Beiträgen am Ende dieses Bandes dokumentiert.

In ihrer Keynote zur Herbsttagung zeigt Anke Lindmeier die Herausforderungen der aktuellen Digitalisierungswelle für die Mathematikdidaktik als Forschungsdisziplin. Es zeigt sich, so der Tenor des Beitrags, dass trotz vielfältiger auch in der Praxis grundierter Forschungsergebnisse ein kohärenter theoretischer Rahmen fehlt, der die fachdidaktische Position zur Digitalisierung öffentlichkeitswirksam prägend könnte.

In insgesamt dreizehn Beiträgen zum Tagungsband wird der mathematikdidaktische Zugriff auf die Herausforderungen der Digitalisierung für das Lehren und Lernen von Mathematik in einer großen Bandbreite beleuchtet. Wie in den Arbeitsgruppen fokussierend adressiert finden wir auch in den Beiträgen das Potenzial digitaler Werkzeuge und Lernumgebungen für die Thematisierung neuer Inhalte und ihre Wirkungen auf Vermittlung und Wahrnehmung bekannter Inhalte und Kompetenzen thematisiert. Thematisiert wurde auch der Zusammenhang zwischen der digitalen Medialisierung von mathematischen Begriffen und Verfahren auf Denken und Sprechen über Mathematik. Und man befasste sich mit der Notwendigkeit, insbesondere fachbezogene digitale Kompetenzen in neuen Konzepten der Lehreraus- und -fortbildung in den Blick zu nehmen.

Mit 32 Teilnehmerinnen und Teilnehmern aus Forschung, Praxis und Bildungsadministration zeigte sich die Herbsttagung 2017 des Arbeitskreises Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge personell und inhaltlich breit aufgestellt. Dieser Band kann die vielen anregenden Diskussionen innerhalb und außerhalb der Tagungsräume nur unzureichend wiedergeben. Er ist aber doch eine gute Dokumentation der Arbeit im neu aufgestellten Arbeitskreis, der in 2016 die Anliegen und Ziele des Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik unter den neuen Bedingungen der sogenannten „digitalen Wissensgesellschaft“ in Forschung und Praxis fortsetzt.

Heidelberg und Essen
im Februar 2018

Guido Pinkernell und Florian Schacht

Quellen

BMBF (2016). Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft. Strategie des Bundesministeriums für Bildung und Forschung. URL: https://www.bmbf.de/files/Bildungsoffensive_fuer_die_digitale_Wissensgesellschaft.pdf. (Zugriff am 23.03.2017).

GDM-Positionspapier: Die Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft. Eine Chance für den fachdidaktisch reflektierten Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht. In GDM-Mitteilungen 103, S. 39-41.

KMK (2016). Bildung in der digitalen Welt. Strategie der Kultusministerkonferenz. URL: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2016/Bildung_digitale_Welt_Webversion.pdf (Zugriff am 23.03.2017).

Inhaltsverzeichnis

Berichte aus den Arbeitsgruppen

Anhang

Digitale Medien im Mathematikunterricht: Welche Rolle spielt die Fachdidaktik im Innovationsprozess?

Anke Lindmeier

Die Einführung digitaler Medien in Lernumwelten wird aktuell bildungspolitisch über einen top-down Ansatz forciert, wobei für den Mathematikunterricht dabei speziell mathematikbezogene Werkzeuge von Interesse sind. Die Einführung solcher Werkzeuge im Fachunterricht kann als Innovationsprozess verstanden werden. In diesem Beitrag wird geklärt, was Innovationen von bloßen Neuerungen unterscheidet und inwiefern die derzeitige Forschungslage geeignet ist, das Innovationspotenzial der genannten Medien aufzuzeigen. Daraus ergeben sich eine Reihe Herausforderungen für die Mathematikdidaktik. Die vorliegenden mathematikdidaktischen Forschungserkenntnisse zeigen, dass viele Fragen bisher nur ansatzweise geklärt werden können und die Forschungslage wenig kohärent ist. Der Beitrag arbeitet heraus, wie im Anschluss daran innerhalb der Mathematikdidaktik der wissenschaftliche Diskurs über Medieneinsatz im Mathematikunterricht qualitativ gestärkt werden kann.

Einleitung

Sind digitale Medien im Fachunterricht eine „echte“ Innovation oder „nur“ eine Variation der zur Verfügung stehenden instruktionalen Mittel? Obwohl die Frage erst retrospektiv beantwortet werden kann, ist sie bereits in der Vorschau interessant. Denn „echte“ Innovationen verändern Inhalte, Methoden und Arbeitsweisen des Mathematikunterrichts nachhaltig. In den Extremfällen hieße das für die Fachdidaktik: Erscheinen digitale Medien nur als eine Variation von Mitteln, so kann der fachdidaktische Diskurs durch eine Aufnahme entsprechender medienbezogener Inhalte aktualisiert werden. Erweisen sich digitale Medien aber als echte Innovation, sind tiefgreifendere Umbrüche im Diskurs, beispielsweise in Bezug auf die theoretischen Grundlagen oder die Natur des Mathematikunterrichts zu erwarten. Als spezifische Form digitaler Medien für den Mathematikunterricht gelten die digitalen Mathematikwerkzeuge, die aus mathematikdidaktischer Sicht besonderes Interesse hervorrufen und im folgenden Beitrag exemplarisch fokussiert werden.

Zunächst ist zu klären, was unter einer Innovation aus wissenschaftlicher Perspektive zu verstehen ist. In der Techniksoziologie (Rammert, 2010) werden Innovationen dadurch charakterisiert, dass sie als neu gelten (z. B. zeitlich oder technisch) und neuartig sind (z. B. veränderte Arbeitsweisen erfordern oder zu einem veränderten Verständnis einer Sache führen), sowie ihre Nutzung auch gesellschaftlich als Verbesserung in Bezug auf eine relevante Größe erfahrbar wird (z. B. die Mathematik schneller gelernt werden kann oder höhere Standards erreichbar sind).

Digitale Mathematikwerkzeuge können als im Unterricht verfügbare Mittel immer noch als neu charakterisiert werden, wie die fortwährend allgemein niedrig ausgeprägte Mediennutzung im deutschen Schulunterricht nahe legt (z. B. Lorenz et al., 2017). Insofern interessiert in der gewählten Sichtweise insbesondere, inwiefern digitale Mathematikwerkzeuge auch als neuartig verstanden werden können und zu Verbesserungen beitragen. Im Folgenden wird dazu die fachdidaktische Erkenntnislage skizziert. Dabei zeigt sich, dass gerade diese Fragen zwar ansatzweise bejaht werden können, dabei aber noch viele offene Fragen bleiben, die bisher nicht ausreichend wissenschaftlich bearbeitet wurden.

Fachdidaktische Erkenntnisse unterschiedlicher Traditionen

Für den folgenden Überblick über die mathematikdidaktische Erkenntnislage ist eine geeignete Strukturierung zu wählen, die die Bandbreite der Forschungszugriffe sichtbar macht, ohne jedoch auf der Gegenstandsebene zu sehr ins Detail zu gehen. Trotz großer Heterogenität lassen sich verschiedene Arten fachspezifischer Forschung zu digitalen Mathematikwerkzeugen herausarbeiten (zur Typisierung vgl. Bishop, 1992). Die Wahl der Beispiele zur Illustration der unterschiedlichen Forschungszugriffe dient einer ersten prototypischen Veranschaulichung und ist subjektiv geprägt. Es handelt sich also beim vorliegenden Text um kein systematisches Review.

Scholastische Tradition

Ein erster Typ von Arbeiten ist der scholastisch-philosophischen Tradition zuzuordnen. Ziel entsprechender Arbeiten sind theoretische Positionen, wobei die Mittel die der theoretisch-philosophischen Argumentation sind. In diesen Bereich fallen Arbeiten, die um normative Vorstellungen zur

Stellung der Medien im Fachunterricht ringen und insbesondere auch das Wechselspiel zwischen Medien und fachlichen Lernzielen in den Blick nehmen. Beispielhaft sei hier das von Peschek (1999) auf Basis einer wissenschaftstheoretischen, bildungstheoretischen und sozialphilosophischen Begründungslinie basierende Auslagerungsprinzip genannt. Es zeigt auf, wie der Einsatz des Computers unter gewissen Bedingungen als sinnvoll beurteilt werden und sogar aus wissenschaftstheoretischer Sicht genuin mathematische Einsichten erlauben kann. Dazu gehört die Einsicht in die effiziente Nutzung mathematischer Black Boxes, wenn beispielsweise die Wurzel-Taste eines Taschenrechners beim Lösen einer quadratischen Gleichung verwendet wird.

Solche Analysen können wechselweise beim Lerngegenstand oder den Medien ansetzen. Prototypisch sind dann Fragestellungen wie die, welches fachdidaktische Potenzial gewisse Medien aufweisen. Dabei kommt es auch zur Erkenntnis, dass sich durch Medienveränderungen Normen wie fachliche Lernziele verändern oder erweitern können (Fey, 1989; Graf et al., 1992). Eine Erweiterung der Lernziele im engeren Sinne liegt vor, wenn neue Themengebiete Gegenstand des Unterrichts werden. Etwa haben durch den Computer die Methoden der mathematischen Modellbildung in viele Wissenschaften Eingang gefunden. Es ist aber bisher unklar, inwiefern sie auch im Schulunterricht abgebildet werden sollen und können (z. B. Henn, 2004; Vogel, 2014). Von einer Erweiterung der Lernziele im weiteren Sinne kann gesprochen werden, wenn bestehende fachliche Lernziele besser realisiert werden können als bisher. Beispielsweise wird mit der Verfügbarkeit von dynamischen Mathematikwerkzeugen, die Hoffnung verbunden, die bereits seit der Meraner Reform (Klein, 1904) normativ geforderte Basierung des höheren Mathematikunterrichts auf der „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“ besser realisieren zu können (Krüger, 2000; Hoffkamp, 2011). Daran anschließend sind etliche Entwürfe entstanden, etwa dynamische Veranschaulichungen des Zusammenhangs zwischen konkreten Operationen und abstrakten Modellen, die den Erwerb funktionaler mentaler Modelle unterstützen sollen (Vogel et al., 2007; Roth i. d. Band).

Einflussreich zeigen sich in der theoretischen Diskussion zudem anthropozentrisch-soziologisch geprägte Theorien. Diese betonen die Rolle sozial geprägter Aneignungspraktiken, durch die Medien erst zu Instrumenten im engeren Sinn werden („instrumental genesis“, Artigue, 2002). Es wird argumentiert, dass die Entwicklung neuer Praktiken eine Herausforderung für Lehrende und Lernende darstellt. Artigue zeigt am Beispiel von Computer-Algebra-Systemen (CAS) auf, wie je nach fachlichem Potenzial ein zum Instrument gewordenes Medium allerdings für Lernende dann im Umkehrschluss einen Mehrwert darstellen kann, indem es den Aufbau konzeptuellen Verständnisses erleichtert oder als kommunikatives Mittel genutzt werden kann.

Die skizzierten Stränge innerhalb der scholastisch-philosophischen Tradition können in Kombination zur normativen Beschreibungen von medienbezogenen Kompetenzen führen, wofür das „competence model for the use of symbolic calculators“ (Weigand & Bichler, 2010) ein Beispiel ist. Hier werden konzeptuell-inhaltliche Vorstellungen zum funktionalen Denken und Arten der Nutzung von graphischen Taschenrechnern synthetisiert.

Mit scholastisch-philosophischen Mitteln kann also die Frage angegangen werden, inwiefern digitale Mathematikwerkzeuge als neuartig zu bewerten sind, etwa zu einem neuartigen Mathematikunterricht oder neuartigem Verständnis von Mathematik führen können. Die Arbeiten legen überzeugend dar, dass – vor allem unter Berücksichtigung der sozialen Natur von mathematischem Lernen – digitale Mathematikwerkzeuge dieses Potenzial prinzipiell aufweisen. Es fehlt jedoch die fortgesetzte Diskussion konkreterer theoretischer Entwürfe, beispielsweise welche Arbeitsweisen oder Themen durch die Nutzung welcher digitaler Mathematikwerkzeuge welche Art von Erneuerung erfahren sollen.

Pädagogische Tradition

Die Motivation von Arbeiten in der pädagogischen Tradition (nach Bishop, 1992) ist auf eine direkte Verbesserung des Fachunterrichts gerichtet. Die Mittel liegen in der systematischen (Weiter-)Entwicklung von Lernumgebungen, um Best Practice, Handlungsempfehlungen, Designprinzipien, etc. herauszuarbeiten, die breiter übertragbar sind. Im selten erreichten Idealfall wird „design-based research“ durchgeführt, wobei ein Zwischenschritt dahin fundierte und evaluierte Lernumgebungen sind („research-based design“, vgl. zum Unterschied auch Plomp & Nieveen, 2013).

Wie oben kann die Erkenntnisrichtung hier wechselseitig eher von einem instruktionalen Problem („Wie erzielt man besser ein bestimmtes Lernziel?“, vgl. z. B. zur Statistik Biehler & Kombrink, 2004) oder eher von den Medien ausgehen („Welche Lernziele kann das Medium X bedienen?“, vgl. z. B. zu verschiedenen Medien Ruppert & Wörler, 2013). Häufig werden beide Bezugspunkte gleichzeitig genutzt, so dass eine trennscharfe Zuordnung nicht immer möglich ist.

Die Bandbreite der zahlreichen Entwicklungsarbeiten in der pädagogischen Tradition kann hier kaum dargestellt werden. Viele Beispiele verstehen sich als Prototypen. Nicht immer ist allerdings nachvollziehbar berichtet, zu welchem Grad diese Entwicklungsarbeiten theoriebasiert sind. Ein eher positives Beispiel ist hier die Sammlung von thematisch fokussierten mathematischen Mikrowelten (SimCalc MathWorlds, Roschelle et al., 2010). Sie entstanden ursprünglich, um Calculus-Kurse medienbasiert zu reformieren und bauen auf sorgfältigen fachlichen Analysen in der scholastisch-philosophischen Tradition auf (Kaput, 1997) und wurden über Jahre zu einem Modell technologiebasierten Unterrichts weiterentwickelt. Solche längerfristigen, gezielten Weiterentwicklungen sind selten zu beobachten. Insbesondere fehlt häufig die Formulierung von übergreifenden Prinzipien, die die Entwicklung der Vorgehensweisen selbst wissenschaftlich zugänglich werden lassen. Zu den Ausnahmen gehören die bereits genannten Gestaltungsprinzipien, die SimCalc zugrunde liegen (Roschelle et al., 2010). Die tool-bezogenen Designprinzipien für Lernumgebungen im Bereich Daten und Zufall können ebenfalls als generalisierte Designprinzipien verstanden werden (Cobb & McClain, 2004). Das Artifact-Centric Activity-Theory (ACAT) Framework ist ein kürzlich vorgeschlagener Ansatz, um die Design-Prozesse bei der Entwicklung virtueller Werkzeuge für den Mathematikunterricht zu strukturieren (Ladel & Kortenkamp, 2013). Bisher fehlt jedoch in den meisten Fällen die explizite Untersuchung der Design-Prozesse.

Neben exemplarischen Arbeiten gehören zur pädagogischen Tradition weiter auch größere Modellversuche, beispielsweise der bayerische M3-

Modellversuch, der die flächendeckende Implementation der CAS vorbereitet hat (Weigand, 2006; ISB, 2011). Durch solche Modellversuche kann z. B. abgeschätzt werden, dass es bis zu einem Jahr dauern kann, bis ein digitales Mathematikwerkzeug bei durchgängiger Nutzung überhaupt als eingeführt gelten kann (Weigand & Bichler, 2009).

Die Arbeiten in dieser Forschungstradition haben den Zweck, die pädagogische Praxis zu verbessern. Kann mit Hilfe dieser Forschungsarbeiten aber gezeigt werden, dass digitale Mathematikwerkzeuge tatsächlich zu Verbesserungen führen? Bei genauerer Betrachtung werden zwei Schwierigkeiten deutlich: Zum einen wird in der pädagogischen Tradition häufig vernachlässigt, Evidenz für ein Referenzkriterium zu generieren, die die postulierte Verbesserung der pädagogischen Praxis überzeugend darlegen kann. Die Entwicklung einer exemplarischen, digital gestützten Lernumgebung kann dies nicht leisten. Zum anderen ist häufig nicht untersucht – oder zumindest nicht berichtet – inwiefern die Entwicklungsprodukte tatsächlich als kondensierte Best Practice-Beispiele gelten können, also beispielsweise systematische Entwicklungszyklen durchlaufen haben und von den Entwicklungskontexten in andere Kontexte übertragen werden können.

Empirisch-wissenschaftliche Tradition

Der dritte Typ der fachdidaktischen Forschungsarbeiten steht in der empirisch-wissenschaftlichen Tradition, die zum Ziel hat, empirisch gestützte Modelle zur Beschreibung, Erklärung und Vorhersage von beobachtbaren Phänomenen zu entwickeln. In diesen Bereich fallen sowohl qualitativ-rekonstruktive als auch quantitativ-hypothesenprüfende Zugänge.

Im Bereich der qualitativ-rekonstruktiven Arbeiten sind Studien zur Nutzung von Medien mit Bezug zur „instrumental genesis“ einzusortieren, die sich im Idealfall an eine Entwurfsphase in der scholastisch-philosophischen und eine Entwicklungsphase in der pädagogischen Tradition anschließen. Bei der Einführung neuer Mathematikwerkzeuge sind Studien zum Nutzungsverhalten besonders interessant, um durch ihren Einsatz sich ergebende Schwierigkeiten oder Potenziale aufzudecken. Dies sei an zwei Beispielen gezeigt. Bei Hoffkamp (2012) werden in Fallstudien die Nutzungsarten einer digitalen dynamischen Lernumgebung beim Erwerb konzeptuellen Verständnisses im Bereich funktionalen Denkens untersucht. Die digitale Lernumgebung ermöglicht, analytische Konzepte durch die Untersuchung variabler Situationen in grafischer Repräsentation zu entwickeln. Gleichzeitig werden aber für manche Lernende Repräsentationsmerkmale salient, die den Konzepterwerb behindern können. Hoffkamp (2012) kann instruktionale Hilfen herausarbeiten, die sich in dem Fall als geeignet erwiesen haben, um die Schwierigkeiten aufzulösen. Kieran und Drijvers (2006) können – ebenfalls an Fällen – aufzeigen, wie in einer gemischten Lernumgebung (Papier-Bleistift und CAS) über den Abgleich verschiedener Arbeitsweisen der Erwerb konzeptuellen Verständnisses unterstützt wird. Dabei wird im Detail deutlich, wie gravierend sich die Arbeitsweisen auf Papier und mit dem CAS teilweise unterscheiden. Trotz einer nicht geringen Zahl an Arbeiten zum Nutzungsverhalten erscheint hier ein „blind spot“ der fachdidaktischen Forschung: Wenig systematisch thematisiert wurden bisher Fragen der Integration verschiedener Medien im Fachunterricht. Wenn unterschiedliche Medien aber Unterschiede in den Arbeitsweisen und im Verständnis bedingen, dann bedürfen die Wechsel zwischen ihnen besonderer Aufmerksamkeit. Wie erwähnt, können solche Wechsel gegebenenfalls auch genutzt werden, um verschiedene Aspekte eines Konzepts zu thematisieren. Im schlechteren Fall treten aber Diskontinuitäten im Lernprozess auf, die Konzepterwerb behindern. Die Integration über verschiedene Medien entscheidet also darüber, ob die Lernenden kohärente fachliche Lernprozesse erleben.

Insgesamt kann durch qualitativ-rekonstruktive Studien ein vertieftes Verständnis für Möglichkeiten und Schwierigkeiten von gut charakterisierten Lernumgebungen für bestimmte Lernziele erlangt werden. Die Arbeiten stellen im Rahmen eines „research-based designs“ sowie der systematischen Weiterentwicklung wichtige Schritte dar und können Hinweise dafür liefern, dass angenommene Wirkmechanismen zutreffen bzw. was diese unterbindet. Den Beleg einer Wirksamkeit im engeren Sinn können sie meist nicht leisten, insbesondere wenn Fragen der Generalisierbarkeit und Übertragbarkeit in andere Kontexte nicht adressiert werden.

Dazu wären prinzipiell quantitativ-hypothesenprüfende Zugänge geeignet, wobei die Ausführungen im Folgenden auf Studien beschränkt sind, die tatsächlich vergleichende Evidenz anzielen. Roth (2005, 2008) hat beispielsweise eine Lernumgebung zur dynamischen Interpretation statischer geometrischer Situationen einer quantitativen Evaluation im Prä-Post-Kontrollgruppendesign unterzogen, mit der nachgewiesen werden konnte, dass die Lernumgebung entsprechende Fähigkeiten differenziell fördert. Im oben genannten CAS-Modellversuch M3 wurde eine vergleichbare quantitative Evaluation durchgeführt, wobei hier die Leistungstests ohne CAS zu bearbeiten waren und sich keine Unterschiede im mittleren Leistungsanstieg zeigten (Weigand & Bichler, 2009). Die beiden Beispiele zeigen recht deutlich, wie unterschiedliche Evaluationskriterien angelegt werden können: Während die erste Studie darauf zielt, die Wirksamkeit der Lernumgebung nachzuweisen, zielt die zweite Studie darauf, negative Effekte der Lernumgebung auszuschließen. Beide Studien können als positive Beispiele dafür gelten, dass die entwickelten Lernumgebungen unter der jeweiligen Sichtweise wirksam sind. Als einzelne Studien ist ihre Aussagekraft jedoch als beschränkt einzuschätzen und Replikationen sowie die Prüfung, ob es sich um generalisierbare Ergebnisse handelt, stehen aus.

Solche Fragen können in komplexen, ressourcenintensiven Feldstudien bearbeitet werden. Für die bereits erwähnte SimCalc Umgebung zeigt eine solche Studie in den USA robuste Effekte der Lernumgebung wobei vor allem die Entwicklung höherstehender mathematischer Konzepte unterstützt wurde (Roschelle et al., 2010). Bei genauerer Betrachtung zeigt sich jedoch, dass auch in dieser Studie schwache Vergleichsbedingungen realisiert wurden, was die Aussagekraft einschränkt. Nicht beantwortet werden kann beispielsweise, ob SimCalc eine effektivere Lernumgebung darstellt als andere Lernumgebungen, die auf ähnlichen Prinzipien aufbauen oder ob insbesondere der Einsatz der digitalen Werkzeuge in SimCalc für positive Effekte verantwortlich ist.

Wenn in Fallstudien oder durch theoretische Betrachtungen Hypothesen über relevante Verbesserungen durch die Nutzung digitaler Mathematikwerkzeuge oder digital gestützter Lernumgebungen gewonnen wurden, so ist der quantitativ-hypothesenprüfende Zugang also im Prinzip dazu geeignet, diese zu erhärten. Allerdings ist die Forschungslage auch in diesem Bereich noch unterentwickelt. Zum einen gibt es wenige Studien, die überhaupt im vergleichenden Zugang Evidenz für postulierte Verbesserungen anstreben. Dabei wird die Bandbreite der möglichen Referenzkriterien längst nicht abgedeckt. Zum anderen liegen häufig Schwächen im Design vor, was die Aussagekraft der Studien beschränkt. Es ist fraglich, inwieweit bisher gefundene positive Effekte aus dem Vergleich von digital gestützten Lernumgebungen eher auf schwache Kontrollgruppen denn auf die digitalen Mathematikwerkzeuge selbst zurückzuführen sind.

Zusammenfassung

Zusammenfassend zeigt sich, dass für die Bearbeitung der Frage, ob digitale Mathematikwerkzeuge als Innovation zu charakterisieren sind, Erkenntnisse aus allen drei fachdidaktischen Forschungstraditionen informativ sind, die sich im Idealfall aufeinander beziehen und kumulativ zu Erkenntnisgewinn führen.

Die Analyse zeigt in Bezug auf die Neuartigkeit, dass digitale Mathematikwerkzeuge zu neuartigem Mathematikunterricht führen können, beispielsweise dann, wenn sie einen bis dato im Unterricht nicht thematisierten Sachverhalt erst vermittelbar machen. Sie können zudem als neuartig bewertet werden, wenn sie zu deutlich anderen Praktiken oder anderen fachlichen Lernprozessen, beispielsweise bei der Begriffsbildung, führen. Das Neuartige ist aber im Einzelfall zu bewerten. Insbesondere gibt es auch digital gestützten Mathematikunterricht, der das Kriterium neuartig nicht erfüllt, beispielsweise wenn das digitale Mathematikwerkzeug herkömmliche Mittel in gleicher didaktischer Funktion und unter Übernahme der Arbeitsweisen substituiert.

Führen digitale Mathematikwerkzeuge zu den theoretisch geforderten Verbesserungen in Bezug auf eine relevante Größe des Mathematikunterrichts? Die Frage ist für digitale Mathematikwerkzeuge derzeit eher ambivalent zu bewerten. Auf der einen Seite stehen erwartete Verbesserungen in Bezug auf die Lernwirksamkeit mediengestützten Unterrichts – insbesondere auch unter Berücksichtigung der (derzeit) normativ positiv besetzten Kriterien Individualisierung, Adaptivität und

Ubiquität. Bisher steht der Nachweis der erwarteten Effekte allerdings in weiten Teilen noch aus. Auf der anderen Seite stehen bekannte Probleme, die teilweise erst durch die Nutzung digitaler Medien auftreten (z. B. technische Probleme, zusätzliche Lernschwierigkeiten durch fehlende Benutzungskompetenz, Qualifikationslücken der Lehrkräfte, Fragen der Integration über analoge und digitale Medien, Fragen der Kohärenz von Lernprozessen). In Abwägung der verschiedenen Seiten und unter Berücksichtigung der vorliegenden Evidenz kann heute kaum allgemein entschieden werden, ob Medieneinsatz im Fachunterricht prospektiv eher instruktionale Probleme bereitet oder lösen kann.

Zum Beitrag der Fachdidaktik

Die obige Analyse zeigt auf, dass durch mathematikdidaktische Forschungsarbeiten das im Kern durchaus innovative Potenzial digitaler Mathematikwerkzeuge herausgearbeitet werden konnte, auch wenn noch nicht alle Charakteristika zur klaren Kennzeichnung einer Innovation erfüllt sind. Es mangelt dabei auch nicht an Vorschlägen für digital gestützten Mathematikunterricht, wohl aber an nachvollziehbar berichteter Entwicklungsforschung, deren übergreifende Erkenntnisse auch in entsprechenden Publikationen niedergelegt werden. Zudem ist es der Fachdidaktik bisher nicht gelungen, auf praktischer Ebene die erwartete erfahrbare Erleichterung oder Verbesserung überzeugend nachzuweisen. Was darüber hinaus zu fehlen scheint ist eine vertiefte Beschäftigung mit der Frage, wie tiefgreifend die Veränderungen sind, die sich durch die verstärkte Nutzung digitaler Mathematikwerkzeuge ergeben. Verändert sich damit nur, wie Mathematikunterricht auf der Oberfläche aussieht? Oder verändern sich auch Inhalte, Konzeptverständnis und Arbeitsweisen gravierend? Wird das Veränderungspotenzial unterschätzt und die Forschung nicht darauf ausgerichtet, so können die Fachdidaktiken ihre Relevanz als Wissenschaft vom Lehren und Lernen im Fachunterricht einbüßen. Die Notwendigkeit, das Thema digital gestützten Mathematikunterricht ernst zu nehmen, ergibt sich auch aus dem praktischen Auftrag, Fachlehrkräfte für das Unterrichten mit Medien auszubilden. Die Mathematikdidaktik steht vor der Wahl, ob sie dafür nur eine Integrationsfunktion (Blömeke, 2003) über die Bezugsdisziplinen wie Fach, Mediendidaktik und Psychologie wahrnehmen möchte oder nicht doch auch einen eigenständigen mathematikdidaktischen Beitrag leisten kann. Dazu müsste ein reger Diskurs die fortschreitende Integration digitaler Mathematikwerkzeuge gestaltend begleiten.

Dieser Text ist eine gekürzte und modifizierte Fassung des Beitrags Lindmeier (2018) und entstand im Rahmen des Projekts „MiU – Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht“, das durch die Joachim Herz Stiftung gefördert wird. Bei der Arbeit an diesem Beitrag haben sich fachdidaktisch relevante Fragestellungen herauskristallisiert, deren systematische Untersuchung zur Stärkung des fachdidaktischen Diskurses über digitale Werkzeuge beitragen kann. Diese sind im Originaltext nachzulesen.

Literatur

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7(3), 245-274.

Biehler, R., Kombrink, K. (2004). Elementare Stochastik interaktiv – Einführende Stochastikausbildung mit Unterstützung didaktisch orientierter Werkzeugsoftware. In R. Biehler, J. Engel, J. Meyer (Hrsg.). Neue Medien und innermathematische Vernetzungen in der Stochastik. Anregungen zum Stochastikunterricht (Band 2, S. 151-168). Hildesheim: Franzbecker.

Bishop, A. J. (1992). International perspectives on research in mathematics education. In D. A. Grouws (Hrsg.). Handbook of research on mathematics teaching and learning (S. 710-723). New York: Macmillan.

Blömeke, S. (2003). Neue Medien in der Lehrerausbildung. Zu angemessenen (und unangemessenen) Zielen und Inhalten des Lehramtsstudiums. MedienPädagogik: Zeitschrift für Theorie und Praxis der Medienbildung, 1-29.

Cobb, P., McClain, K. (2004). Principles of instructional design for supporting the development of students’ statistical reasoning. In D. Ben-Zvi, J. Garfield (Hrsg.). The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking (S. 375-395). Dordrecht: Springer.

Fey, J. T. (1989). Technology and mathematics education: A survey of recent developments and important problems. Educational Studies in Mathematics, 20(3), 237-272.

Graf, K. D., Fraser, R., Klingen, L., Stewart, J., Winkelmann, B. (1992). The effect of computers on the school mathematics curriculum. In B. Cornu, A. Ralston

(Hrsg.). The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching (Science and technology education Band 44, S. 57-79). Paris: Unesco.

Henn, H. W. (2004). Computer-Algebra-Systeme – junger Wein oder neue Schläuche?. Journal für Mathematik-Didaktik, 25(3-4), 198-220.

Hoffkamp, A. (2011). The use of interactive visualizations to foster the understanding of concepts of calculus: design principles and empirical results. ZDM, 43(3), 359-372.

Hoffkamp, A. (2012). Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen-Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse. Dissertation. TU Berlin.

ISB (2010). Computeralgebrasysteme (CAS) im Mathematikunterricht des Gymnasiums. Jahrgangsstufe 10. München: Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung. Verfügbar unter: www.isb.bayern.de/download/8237/cas_mathematik_gymnasium.pdf (letzter Zugriff: 10.07.2017).

Kaput, J. J. (1997). Rethinking calculus: Learning and thinking. The American Mathematical Monthly, 104(8), 731-737.

Kieran, C., Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. International journal of computers for mathematical learning, 11(2), 205-263.

Klein, F. (1904). Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen. In F. Klein, E. Riecke (Hrsg.). Neue Beiträge zur Frage des Mathematischen und Physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Leipzig: B. G. Teubner.

Krüger, K. (2000). Kinematisch-funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts – das Scheitern der Meraner Reform. Mathematische Semesterberichte, 47(2), 221-241.

Ladel, S., Kortenkamp, U. (2013). Designing a technology based learning environment for place value using artifact-centric activity theory. In A. M. Lindmeier, A. Heinze (Hrsg.). Proceedings of the 37th Conference of PME (Vol. 1, S. 181-210). Kiel: PME.

Lindmeier, A. (2018). Innovation durch digitale Medien im Fachunterricht? Ein Forschungsüberblick aus fachdidaktischer Perspektive. In M. Ropohl, A. Lindmeier, H. Härtig, L. Kampschulte, A. Mühling, J. Schwanewedel (Hrsg.). Medieneinsatz im naturwissenschaftlichen Unterricht (S. 55-96, mit Anhang). Hamburg: Joachim Herz Stiftung Verlag.

Lorenz, R., Bos, W., Endberg, M., Eickelmann, B., Grafe, S., Vahrenhold, J. (Hrsg.) (2017). Schule digital – Der Länderindikator 2017. Münster: Waxmann.

Peschek, W. (1999). Mathematische Bildung meint auch Verzicht auf Wissen. In G. Kadunz, G. Ossimiz, W. Peschek, E. Schneider, B. Winkelmann (Hrsg.). Mathematische Bildung und Neue Technologien (S. 263-270). Leipzig: Vieweg+Teubner.

Plomp, T., Nieveen, N. (2013). Educational design research. Part A: An Introduction. Enschede: SLO. Verfügbar unter: www.slo.nl/downloads/2013/educational-design-research-part-a.pdf (letzter Zugriff: 10.07.2017).

Rammert, W. (2010). Die Innovationen der Gesellschaft. Berlin: TU Berlin. Verfügbar unter: www.ts.tu-berlin.de/fileadmin/fg226/TUTS/TUTS-WP-2-2010.pdf (letzter Zugriff: 21.11.2016).

Roschelle, J., Shechtman, N., Tatar, D., Hegedus, S., Hopkins, B., Empson, S., Gallagher, L. P. (2010). Integration of technology, curriculum, and professional development for advancing middle school mathematics: Three large-scale studies. American Educational Research Journal, 47(4), 833-878.

Roth, J. (2005). Bewegliches Denken im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Roth, J. (2008). Zur Entwicklung und Förderung beweglichen Denkens im Mathematikunterricht. Eine empirische Längsschnittuntersuchung. Journal für Mathematikdidaktik, 29(1), 20-45.

Ruppert, J. W. M., Wörler, J. (Hrsg.) (2013). Technologien Im Mathematikunterricht. Wiesbaden: Springer.

Vogel, M. (2014). Visualisieren–Explorieren–Strukturieren: Multimediale Unterstützung beim Modellieren von Daten durch Funktionen. In T. Wassong, D. Frischemeier, P. R. Fischer, R. Hochmuth, P. Bender (Hrsg.). Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen–Using Tools for Learning Mathematics and Statistics (S. 97-111). Wiesbaden: Springer.

Vogel, M., Girwidz, R. & Engel, J. (2007). Supplantation of mental operations on graphs. Computers & Education, 49(4), 1287-1298.

Weigand, H. G. (2006). Der Einsatz eines Taschencomputers in der 10. Jahrgangsstufe-Evaluation eines einjährigen Schulversuchs. Journal für Mathematik-Didaktik, 27(2), 89-112.

Weigand, H. G., Bichler, E. (2009). The long term project "Integration of symbolic calculator in mathematics lessons" – The case of calculus. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, F. Arzarello (Hrsg.). CERME 6. Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (S. 1191-1200). Lyon: INRP.

Weigand, H. G., Bichler, E. (2010). Towards a competence model for the use of symbolic calculators in mathematics lessons: the case of functions. ZDM, 42(7), 697-713.

Krypto im Advent

Thomas Borys

„Krypto im Advent“ ist ein Online-Adventskalender, der für jedermann zugänglich ist. Er führt in die Welt der Kryptologie ein und lässt sich in den Bereich Open Educational Resources einordnen. Die zentrale Zielgruppe sind Schüler/innen der Klassen 3-9, deren Aufgabe darin besteht, in 24 Tagen 24 verschiedene Krypto-Rätsel zu lösen. In kleinen, selbst herstellten Videos werden viele Verschlüsselungsverfahren erläutert, die vor allem zur haptischen Mitarbeit auffordern. Die Webseite und der Wettbewerb werden von der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe und der Karlsruher IT-Sicherheitsinitiative (KA-IT-Si) zusammen ausgerichtet.

Einleitung

Die Kryptologie ist eine sehr alte Wissenschaft. War sie bis vor wenigen Jahrzehnten noch eine Wissenschaft für Regierungen, Militär, Geheimdienste und Spione, so ist sie aufgrund der vielen Anwendungen im Umfeld des Computers in unserem Leben nahezu allgegenwärtig. Man bedient sich ihrer täglich, Beispiele hierzu sind: das Einloggen auf dem E-Mail-Account, Arbeiten auf https-Seiten z. B. beim Onlinebanking und Telefonieren mit dem Handy. Es stellt sich nun die Frage, wie führt man Kinder an diese Wissenschaft heran? Denkt man an eine schulische Umsetzung des Themas, stehen verschiedene Alternativen zur Verfügung, beispielsweise im Rahmen eines Projekts, einer Arbeitsgemeinschaft oder integrativ im Unterricht (ein Vorschlag vgl. Borys 2011, S. 307ff.). Denkt man an eine außerschulische Umsetzung, so könnte diese beispielsweise mit einem Online-Lehrgang oder einem interaktiven Ausstellungsstand auf einer Wissenschaftsmesse erfolgen, wobei letztere zurzeit regelrecht aus dem Boden sprießen. Beide Beispiele haben so ihre Schwierigkeiten. Wenn man einen Online-Kurs anbietet, stellen sich beispielsweise die Fragen, wird ihn jemand nutzen bzw. warum sollte man ihn nutzen. Mit einem interaktiven Ausstellungsstand wird nur ein Lernimpuls gesetzt, somit findet keine längerfristige Auseinandersetzung mit dem Thema statt. Eine andere und bestechend einfache Idee ist es, diesen Online-Kurs mit einem Online-Gewinnspiel zu verbinden. Vorbilder hierfür sind beispielsweise „Mathematik im Advent“ oder „Physik im Advent“. So entstand die Idee mit „Krypto im Advent“ an den Start zu gehen.

Inhalt und Aufbau des Adventskalenders

Überblick

Der Adventskalender besteht aus 24 Krypto-Rätseln, die von den Schülerinnen und Schüler gelöst werden sollen. Da sie die verschiedenen Verschlüsselungen nicht kennen, werden diese durch kurze Videos erläutert. Die Aufgaben und Videos werden allesamt von Studierenden der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe entwickelt. Für das Jahr 2017 waren 5 Studierende für die Aufgabenentwicklung zuständig und 2 Studierende für die Videoproduktion. Die Aufgaben sind gestuft nach zwei Schwierigkeitsgraden, von „Einsteiger“ für Schülerinnen und Schüler der Klassen 3-6 und „Fortgeschrittene“ für Schülerinnen und Schüler der Klassen 6-9. Dabei wird den Schülerinnen und Schülern der Klasse 6 die Möglichkeit eröffnet, sich je nach Selbsteinschätzung in die entsprechende Stufe einzuordnen. Die Aufgaben und Videos widmen sich im Durchgang 2017 den folgenden Themen:

- Bilderverschlüsselung
- Cäsar-Verschlüsselung
- Fantasiezeichen-Verschlüsselung
- Freimaurercode
- Codeknacken
- Anagramme
- Geometrischen Verschlüsselungen
- B-Sprache
- Homophone Verschlüsselung
- Skytale
- Fleissner-Verschlüsselung
- Tabellen-Verschlüsselung
- Trithemius-Verschlüsselung
- Vigenère-Verschlüsselung.

Aufbau der Videos

Die zum Lösen der Aufgaben benötigten Verschlüsselungsverfahren werden alle durch die bereits erwähnten Videos erläutert. Die Videos setzen sich zusammen aus zwei Teilen. Im ersten Teil wird die Geschichte der Protagonisten des Adventskalenders weitererzählt und in einem zweiten wird das entsprechende Verschlüsselungsverfahren erläutert. An dieser Stelle sollen kurz die Protagonisten der Videos vorgestellt werden:

- Krypto, ein Meister der Spionage und Kryptologie
- Kryptina, seine Assistentin
- der Chef, brummig wie ein Chef so ist
- und die drei Spione, die die Arbeit von Krypto und Kyrptina behindern und sich zum Ziel gesetzt haben, die Weihnachtsfeier der Agenten zu sabotieren.

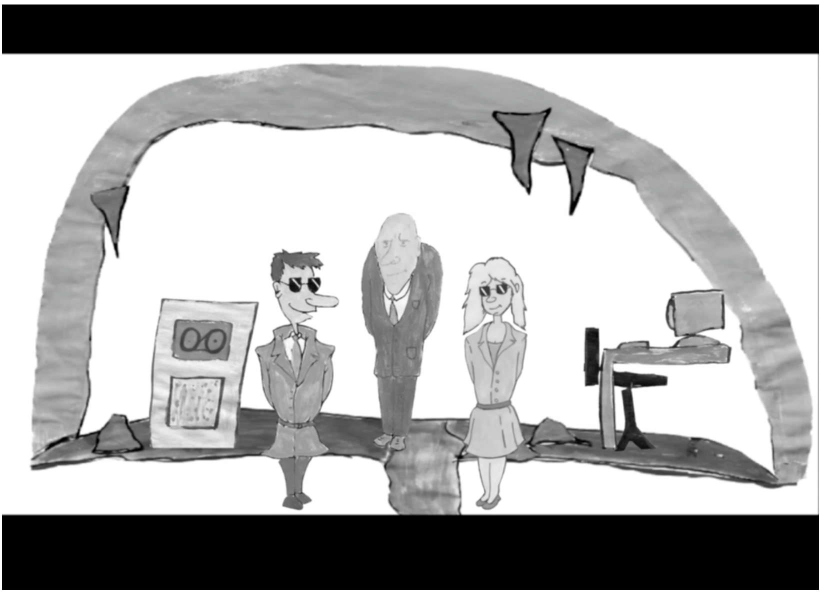


Abb. 1: von links nach rechts, Krypto, der Chef und Kryptina in der Agentenhöhle

Exemplarische Aufgabenstellungen

Aus dem Bereich der Steganographie, die auf dem Verbergen von Nachrichten basiert, werden bei Krypto im Advent z.B. Bilderverschlüsselungen thematisiert. Hierbei wird die zu übermittelnde Nachricht in einem Bild versteckt. Dies kann beispielsweise durch Bilderrätsel (siehe Abb. 2) oder durch versteckte Buchstaben (siehe Abb. 3) erfolgen.

Abb. 2: Aufgabe: Finde den Tag, die Uhrzeit und den Ort des Treffpunkts heraus. Die Informationen sind im Bild versteckt.

Abb.3: Aufgabenstellung: Finde das versteckte Wort.

Steganographische Verschlüsselung wurden historisch betrachtet vielfach verwendet, beispielsweise übermittelten die Autoren des Buchs „Einführung in die Kombinatorik“ die Nachricht „Nieder mit dem Sowjet Imperialismus“, in dem sie einzelne Buchstaben in einem mathematischen Text etwas tiefer setzten. Allerdings gaben die Autoren erst nach der Wende diese Nachricht preis.

Aus dem Bereich Transpostionsverschlüsselungen soll hier die Fleissner-Verschlüsselung vorgestellt werden. Sie wurde von Oberst Eduard Fleissner von Wostrowitz Ende des 19. Jahrhunderts erfunden. Das Herzstück dieser Verschlüsselung sind quadratische Schablonen, die in Raster aufteilt sind, wobei geschickt Felder ausgestanzt sind und andere nicht (vgl. Abb.4). Diese Art der Verschlüsselung wurde tatsächlich verwendet, so nutzte sie der österreichische Erzherzog und Kronprinz Rudolf (1858-1899) für seine private Korrespondenz.

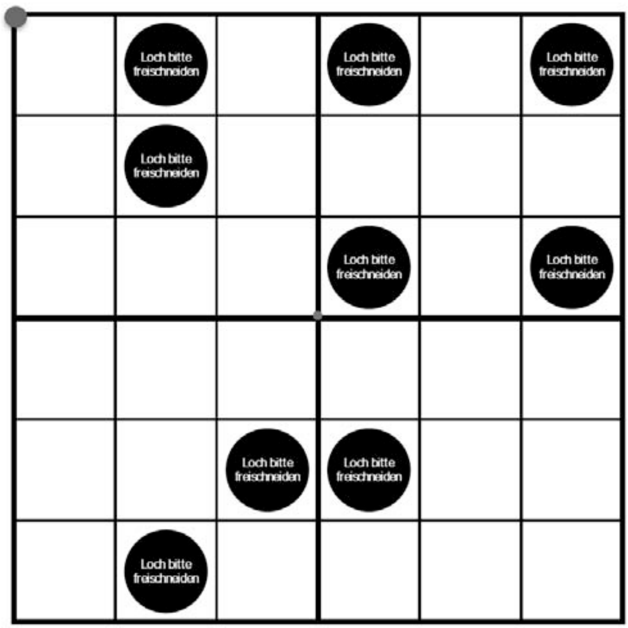


Abb.4: Fleissner-Schablone

Zur Verschlüsselung werden die freien Felder nacheinander mit den Buchstaben der zu übermittelnden Nachricht beschriftet. Sind die Felder ausgefüllt, wird die Schablone um ihren Mittelpunkt um 90° gedreht und die neuen freien Felder werden ausgefüllt. Das wird noch zweimal wiederholt, dann hat man meistens das gesamte Quadrat ausgefüllt. Die geheime Nachricht wird spaltenweise ausgelesen. Ist die zu übermittelnde Nachricht zu kurz, ergänzt man sie mit einer sinnlosen Folge von Buchstaben, ist sie zu lang, so verwendet man ein zweites Quadrat (weitere Ausführungen vgl. Fleissner 1881). Für den Bau dieser Schablone können sich die Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Bastelbogen downloaden, somit können sie ganz haptisch die Kryptologie erfahren. Zur Lösung der Aufgaben des Adventskalenders werden Nachrichten mit der Schablone ver- und entschlüsselt.

Aufbau der Homepage „Krypto im Advent“

Für die Homepage und den Wettbewerb ist unser Partner, die Karlsruher IT-Sicherheitsinitiative (KA-IT-Si) verantwortlich.

Abb.5: Screenshot der Startseite von „Krypto im Advent“ (Stand: 05.11.2017)

Auf der Startseite von „Krypto im Advent“ findet man die ersten wichtigen Informationen über den Adventskalender. Durch einen Einführungstext wird der Kalender vorgestellt, auch findet man einen Link zu unserem

YouTube-Kanal, auf dem das Einführungsvideo abrufbar ist. Zur Navigation durch die Seite findet man in der oberen Zeile die folgenden Pull-Down-Menüs:

- Adventskalender: Hier kommt man ab 1.12. auf die Krypto-Rätsel und die Videos.
- Gewinne: Hier werden die Preise und deren Sponsoren vorgestellt.
- Über KiA: Hier wird erläutert, wie die Idee zu Stande kam, den Adventskalender ins Leben zu rufen und wer bei der Durchführung des Projekts beteiligt ist. Des Weiteren werden Rückmeldungen der Nutzer angezeigt.

Abb.6: Adventskalender, hinter dem sich die Krypto-Rätsel verstecken.

- Spielregeln: Diese sind unterschieden nach allgemeinen und besonderen Regeln. Mit den allgemeinen Regeln wird genau festgelegt, wer am Wettbewerb teilnehmen darf, dass sind Schülerinnen und Schüler der Klassen 3-6 als („Einsteiger“) und Klassen 6-9 („Fortgeschrittene“). Wer keine dieser Bedingungen erfüllt, darf als „Profi“ mitmachen, allerdings außer Konkurrenz, das bedeutet, in dieser Kategorie kann man nichts gewinnen. In den besonderen Regeln ist festgelegt, wie das Gewinnspiel genau abläuft. So ist unter anderem festgelegt, bis wann man seine Lösungen abgeben muss, damit sie mit in die Wertung kommen oder wie man seine Lösung abgeben muss. Außerdem wird erläutert, wie die Punktewertung erfolgt und wann die Preisträgerinnen und Preisträger ausgelost werden.

- Fragen: Hierbei handelt es sich kurz gesagt um FAQ.
- Punkteübersicht: Jeder Nutzer der registriert ist, kann hier seinen Punktestand einsehen.
- Registrieren: Damit man bei dem Online-Adventskalender mitmachen kann, muss man sich registrieren lassen. Denn wir müssen ja in der Lage sein, jedem Nutzer seinen Punktestand zu zuordnen. Für die Registrierung werden nahezu keine Daten erhoben, nur für die Preisträgerinnen und Preisträger werden deren postalische Adresse zur Gewinnübersendung benötigt. Für die Registrierung benötigt man eine gültige E-Mail-Adresse, einen Anmeldenamen, die Klassenstufe sowie ein selbstgewähltes Passwort.

Schließlich findet sich auf der Startseite der Hinweis auf unsere Facebookseite (https://www.facebook.com/Krypto-im-Advent-202888703375822).

Rückmeldungen

Im Jahr 2015 haben 1.100 Personen an dem Wettbewerb teilgenommen, 2016 war es schon 2.400. Von den 2.400 Teilnehmerinnen und Teilnehmer waren 1.800 Schülerinnen und Schüler und 600 Profis. Die Schülerinnen und Schüler haben sich wiederum in 28,4% „Einsteiger“ und 71,6% „Fortgeschrittene“ unterteilt. Über die Herkunft der Teilnehmerinnen und Teilnehmer können keine genauen Aussagen getroffen werden, denn es stehen nur die Herkunftsdaten der Preisträgerinnen und Preisträger zur Verfügung. So hatten wir Preisträgerinnen und Preisträger aus Schweden und aus neun verschiedenen Bundesländern. Als weitere Rückmeldung verfügen wir über die Selbsteinschätzungen der Nutzer zum Schwierigkeitsgrad der Aufgaben. Darüber hinaus haben wir viele Rückmeldungen bekommenden, z.B.

- Devin: "Ich finde Krypto wegen der Caesarverschlüsselung und wegen den Rätseln toll. Mein Lieblingsrätsel waren die Anagramme."

- Samira: "Ich finde Krypto im Advent ist cool und es macht Spaß. Die Caesarverschlüsselung war gut lösbar und es ist toll, dass extra Videos mit Krypto gemacht wurden."
- Doganay: "Ich finde gut, dass die Rätsel nicht einfach sind. Ich will auch mal solche Rätsel erfinden. Die Anagramme finde ich sehr toll."
- Lena: "Der Adventskalender ist toll und spannend. Mir hat die Aufgabe mit der Caesarscheibe und die B-Sprache gefallen."
- Leonie: "Es macht Spaß und ich finde cool, dass es Rätsel gibt. Mein Lieblingsrätsel war das erste: die Bilderverschlüsselung."
- Paola: "Ich finde toll, dass wir jeden Tag eine neue Krypto-Aufgabe bekommen. Ich finde toll, dass ich bei Krypto neue Sachen lerne."
- Klassenlehrerin einer 4. Klasse: "Hallo Krypto-Team, nach wie vor nehmen wir uns jeden Tag die Zeit, den Krypto-Adventskalender zu "öffnen", die Kinder sitzen dabei an ihren "kryptographischen Plätzen" auf dem Klassenzimmerboden und fiebern der neuen Aufgabe entgegen. Wir schauen uns dann das aktuelle Video an, lesen die Aufgabe und die Kinder arbeiten in kleinen Teams und versuchen die Aufgabe zu entschlüsseln. Sobald wir beschlossen haben, welche Lösung wir eingeben, darf ein Kind die Antworten anklicken oder eingeben. Toll ist die Möglichkeit, die Aufgabenblätter zu drucken, vor allem bei Entschlüsselungsaufgaben wie heute. Auch das Basteln der Caesar-Scheibe hat allen besonders gefallen. Damit auch die Wochenendaufgaben gelöst werden, haben alle die Klassenzugangsdaten bekommen. Vielen Dank für dieses bereichernde Angebot!"

Schlussgedanken

Abschließend noch ein hochschuldidakitscher Gedanke. In der angelsächsischen Literatur findet man eine sehr gut passende Idee des Lernens, das sog. „service-learning“. Für dieses existieren viele Beschreibungen. Hier sei die von Godfrey und Grasso (2000) erwähnt. Nach deren Beschreibung setzt sich service-learning aus 4 Komponenten zusammen:

“1. Students actively participate in organized service experiences that meet actual community needs and that are coordinated in collaboration with the school and community.

2. These experiences are integrated into the students’ academic curriculum, and/or structured time is provided for them to think, talk, or write about what they did and saw during their actual service activity.

3. Students have opportunities to use newly acquired skills and knowledge in real-life situations in their own communities.

4. These experiences help to foster the development of a sense of caring for others.” (Godfrey and Grasso 2000, 12)

Die Punkte 1-3 treffen hier für das Projekt zu:

- Zu Punkt1: Die Studierenden bieten hier einen Service für Kinder an, Schülerinnen und Schüler werden mittels des Wettbewerbs in das Thema Ver- und Entschlüsselung von Nachrichten, welches sehr aktuell ist, eingeführt. Also erbringen die Studierenden eine Leistung für die Gesellschaft, sogar noch in Vernetzung mit einer Initiative vor Ort.
- Zu Punkt 2: Zurzeit ist das Projekt intergiert in unser Profilstudium „Medienbildung“. Hierbei geht es hauptsächlich um die Erstellung der Filme. Außerdem ist es aufbauend auf die Vorlesung „Codierung und Kryptologie“.
- Zu Punkt 3: Die Studierenden haben zuvor die Vorlesung „Codierung und Kryptologie“ besucht, so können sie ihr Wissen sofort anwenden, die Studierenden der Medienbildung können ihr neu erworbenes Wissen bei der Filmerstellung anwenden.

Insgesamt kann man festhalten, dass es sich hierbei um ein sehr facettenreiches Projekt handelt. Weitere Informationen sind zu finden auf der Homepage (www.krypto-im-Advent.de).

Literatur

Borys, T. (2011). Codierung und Kryptologie - Facetten einer anwendungsorientierten Mathematik im Bildungsprozess. Wiesbaden: Vieweg+Teubner

Borys, T. (2009): Codierungen und Verschlüsselungen im Spiegel der fundamentalen Ideen der Mathematik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Münster: WTM-Verlag

Godfrey, P. und Grasso, E. (2000). Working for The Common Good: Concepts and Models for Service-Learning in Management. Washington, DC: American Association for Higher Education.

Fleissner von Wostrowitz, E. (1881). Handbuch der Kryptographie - Anleitung zum Chiffrieren und Dechiffrieren von Geheimschriften. Wien: K. k. Hofbuchdruckerei Carl Fromme

Halder, H.-R., & Heise, W. (1976). Einführung in die Kombinatorik. München: HanserLehren und Lernen aus Daten

Data Science als Perspektive des Mathematik- und Informatikunterrichts

Joachim Engel

Einleitung

Vor 30 Jahren waren Daten ein knappes Gut, nur wenig Privilegierte hatten Zugang zu Daten. Heute gibt es Daten überall und fast zu jedem Thema. Fast jeder hat Zugang. Big Data und Open Data verändern nicht nur die Wissenschaft und die Erschließung zu neuem Wissen sondern beeinflussen auch alltägliche Entscheidungen im privaten, beruflichen und öffentlichen Leben. Dieser Beitrag skizziert einige Implikationen der Datenrevolution für die Bildung im 21. Jahrhundert, plädiert für Data Science als Perspektive des Mathematik- und Informatikunterrichts und berichtet von Lehrkonzepten, die im EU-finanzierten Projekt ProCivicStat entwickelt wurden.

Data Science als Wissenschaft des 21. Jahrhunderts

Data Science bezeichnet generell die Extraktion von Wissen aus Daten. Data Science basiert auf Techniken und Theorien aus Mathematik, Statistik und Informationstechnologie, um komplexe Fragestellungen in einem Anwendungsgebiet zu bearbeiten.

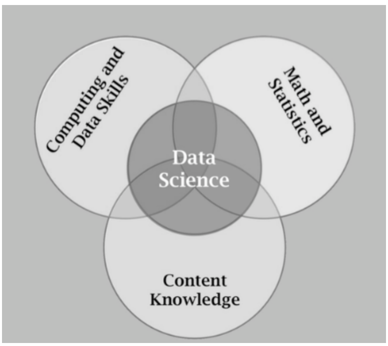


Abb. 1: Data Science als interdisziplinäre Wissenschaft zwischen Mathematik/ Statistik, Informatik und einem Anwendungsgebiet

Data Science ist ein Kind des Zeitalters der Verfügbarkeit und Speicherung großer Datenmengen und leistungsfähiger Hard- und Software. Das Gebiet wird von relevanten Akteuren unterschiedlich definiert. Einige betonen die Nutzung und Entwicklung leistungsfähiger Algorithmen zur Prognose und verorten Data Science eher als Teil der Informatik, andere sehen Data Science in der Tradition explorativer Datenanalyse nach John Tukey (1977) und moderner computerintensiver Statistik (Donoho 2015), weshalb man das Gebiet auch als eine Symbiose aus Statistik und Informatik ansehen kann.

In gewisser Hinsicht ist die Entstehung von Data Science als Kritik an der vorherrschenden akademischen Statistik entstanden, basierend auf einer Wahrnehmung, dass Statistik wenig daran interessiert war, sich mit Daten in einer Weise auseinanderzusetzen, die das Potential, aus Daten zu lernen, voll nutzt. Die klassischen statistischen Methoden, die auch heute in vielen Einführungskursen gelehrt werden, wurden zwischen 1920 und 1950 entwickelt - einer Zeit, in der es keine Computer gab und Berechnungen per Hand durchgeführt werden mussten. Methoden mussten entwickelt werden, die ohne Rechenkraft von Computern durchführbar waren. Der Fokus der Statistik als Wissenschaft und als Teilgebiet der Mathematik lag darauf, mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie Eigenschaften dieser Verfahren nachzuweisen. Die klassischen Verfahren waren darauf angewiesen, vereinfachende Annahmen zu treffen, was heute dank computer-intensiver Verfahren nicht länger nötig sind. Seitdem hat die Anzahl von Methoden der Datenanalyse drastisch zugenommen. Moderne Verfahren der nicht-parametrischen Statistik nutzen mit ihren Algorithmen die scheinbar unbegrenzten Rechenkapazitäten moderner Hardware und kommen mit viel weniger Annahmen aus, um belastbare Schlussfolgerungen zu ziehen. Nicht wenige dieser (rechenintensiven) Methoden sind erwiesenermaßen intuitiv sogar leichter zugänglich als klassische Methoden, z.B. Permutationstests versus t-Test oder Bootstrap-Konfidenzintervalle versus klassischer Konfidenzintervalle (Budgett & Rose 2017). William Cleveland (2001) benutzte als erster den Begriff Data Science und bot eine Definition, die aus einer ähnlichen Kritik entstand, dass die akademischen Statistiker nicht ausreichend mit der Datenanalyse beschäftigt waren. Der Zweck der Datenwissenschaft ist nach Cleveland, „dem Analysten zu erlauben, aus

Daten zu lernen“. Erwähnenswert ist, dass Cleveland auch von forschungsstarken Universitätsinstituten forderte, einen substantiellen Teil ihrer Energie auf Didaktik und Kommunikation ihrer Wissenschaft zu legen.

Big Data und rasant wachsende Rechenkapazitäten haben zur Bildung von ganz neuen Klassen von Modellen geführt, die mit dem Begriff Statistical Learning oder Machine Learning verbunden sind (z.B. Hastie et al. 2008). Machine Learning ist eine Methode der Datenanalyse, die Modellbildung automatisiert. Mit Algorithmen, die iterativ von Daten lernen ist es möglich, verborgene Strukturen zu entdecken, ohne dass der Computer explizit und für die Suche nach speziellen Strukturen programmiert wurde. Einigen Anwendungen begegnen wir alle schon in unserem Alltag, z.B. Handschrifterkennung, Gesichtserkennung, Spracherkennung und Übersetzung, medizinische Diagnose, Betrugserkennung (bei Kreditkartengeschäften) oder Wettervorhersagen. Vertreter des maschinellen Lernens weisen darauf hin, wie in einer komplexen Welt Massendaten zu einer neuen datengetriebenen Wissenschaft führen, die auf effizienten Algorithmen beruht. Mit Big Data lassen sich Phänomene mit beispielloser Genauigkeit erfassen, messen und beschreiben. Dank einer überwältigenden Menge an Daten sind präzise Vorhersagen möglich, auch ohne die Notwendigkeit Phänomene und Vorgänge erklären zu müssen. Sind nur genügend viele Daten vorhanden, so sprechen die Zahlen für sich alleine; präzise Vorhersagen sind jenseits jeder Theorie möglich (Anderson 2008). Leo Breiman (2001) spricht in diesem Kontext von zwei unterschiedlichen Kulturen: einerseits die Suche nach einem passenden Modell, das Erklärungen für das beobachtete Phänomen liefert und die klassischen Methoden der Statistik charakterisiert; andererseits die Suche nach effizienten Algorithmen, die auf der Basis von Big Data den Daten produzierenden Prozess imitieren, nicht um zu erklären sondern um Vorhersagen machen zu können.

Was ist und was will Data Science Education?

Während wir in einer Zeit von großen Datenmengen leben, konzentriert sich die Statistikausbildung in der Sekundarstufe sehr stark auf ein Paradigma des 20. Jahrhunderts, das während der Zeit entwickelt wurde, in dem Daten aus geplanten Studien stammen und von Experten sorgfältig editiert wurden, als Software noch nicht verfügbar oder teuer war und der Zweck einer statistischen Analyse darin bestand, einen p-Wert zu berechnen oder ein Konfidenzintervall zu finden. Heutzutage sind Daten allgegenwärtig und qualitativ hochwertige Software ist preiswert oder umsonst. Viele der Barrieren, die in der Vergangenheit Schüler daran hinderten Daten zu analysieren, existieren nicht mehr.

Ein Grund dafür, dass auch heute im Unterricht kaum große, authentische aus dem Netz gewonnene Datenmengen diskutiert und analysiert werden, ist die Tatsache, dass diese Daten neue Herausforderungen für Lehrende wie für Schüler mit sich bringen. „Traditionelle Daten“ in Schulbüchern (falls sie dort überhaupt vorkommen) sind „flach“, d.h. rechteckig angeordnet in Tabellen mit einer überschaubaren Anzahl von Zeilen („die Fälle“) und einigen Spalten („die Variablen“). In vielen Lehrbüchern werden nur die Spalten bereitgestellt, die erforderlich sind, um ein gegebenes Problem zu lösen. Authentische Daten aus dem Netz hingegen, die z.B. über den Zustand der Welt und Themen wie z.B. Bildung, Migration, Armut, demographischer Wandel, Klima und Umwelt informieren (verfügbar über nationale Statistische Ämter, internationale Einrichtungen wie UN, Eurostat oder UNESCO sowie Nichtregierungsorganisationen), sind oft hierarchisch angeordnet (in Ländern, Regionen, Kontinenten, nach Jahren geordnet) und haben in der Regel eine komplexe multivariate Struktur von korrelierten Variablen, die oft in nichtlinearer Weise miteinander zusammenhängen – ganz im Gegensatz zu den Daten des aktuellen Mathematikunterricht, in dem die Schüler Statistik lernen. Mitunter müssen Daten vor einer Analyse aggregiert oder disaggregiert werden, Variable müssen umkodiert oder transformiert werden, um geeignete Visualisierungen zu ermöglichen.

Mit großen multivariaten Datensätzen zu argumentieren und ihre graphischen Darstellungen zu verstehen, verlangt andere Fähigkeiten als die Analyse uni- oder bivariater Datensätze, die auf kleinen Stichproben basieren und die das gegenwärtige Curriculum in Statistik dominieren. Während traditionelle Daten „Zahlen im Kontext“ sind, bestehen Big Data aus einer Vielzahl von Formaten: Bilder, Text, Töne, Zahlen und geographische Ortsbestimmungen. Diese Daten zu verstehen verlangt nicht nur eine inhaltliche Neuausrichtung des Statistikunterrichts in Richtung „multivariate Phänomene verstehen“, sondern bedarf in gleicher Weise Kompetenzen im algorithmischen Denken, im Verstehen von Daten-strukturen und im computergestützten Visualisieren von Zusammenhängen. Glücklicherweise gibt es inzwischen didaktisch konzipierte Software, die auch ohne das Erlernen eines Programmiercodes das Lernen mit komplexeren Datensätzen und die Visualisierung von Zusammenhängen unterstützt. Pionierarbeit hat hier die schwedische Gapminder Foundation geleistet mit ihren Darstellungen von komplexen Zusammenhängen über den sozialen, ökonomischen und gesundheitlichen Zustand der Menschheit über alle Länder dieser Welt hinweg (siehe www.gapminder.org). Das browser-basierte Tool von Gapminder erlaubt die gleichzeitige Betrachtung von 5 verschiedenen Variablen: zwei Variable wie z.B. Lebenserwartung und Bruttosozialprodukt pro Einwohner im Streudiagramm, mittels Punktegröße und Färbung werden zwei weitere Variable kodiert und mittels Animation wird die Zeit als fünfte Variable repräsentiert (siehe Abbildung 2).

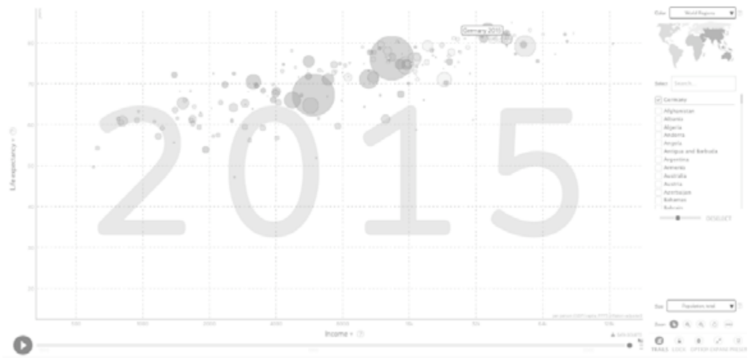


Abb. 2: Visualisierung von hochdimensionalen Daten mit Gapminder (www.gapminder.org): Mittleres Einkommen und mittlere Lebenserwartung von Menschen in Ländern dieser Welt als Punkte im Streudiagramm. Die Punktgröße repräsentiert die Einwohnerzahl und die Farbe den Kontinent des Landes. Klicken auf den Knopf in der unteren linken Ecke zeigt die Daten animiert im Zeitraum zwischen 1800 und 2016.

Ein anderes Tool zur Darstellung multivariater Daten, das zusätzlich eigene Datenanalyseschritte erlaubt, ist CODAP: Common Online Data Analysis Platform (verfügbar unter http://codap.concord.org). CODAP ist eine freiverfügbare, web-basierte didaktisch konzipierte Umgebung zum Datenmanagement und zur Visualisierung von komplexen Daten, die die gewünschten Transformationen und Umstrukturierungen von Daten unterstützt (siehe Abbildung 3).

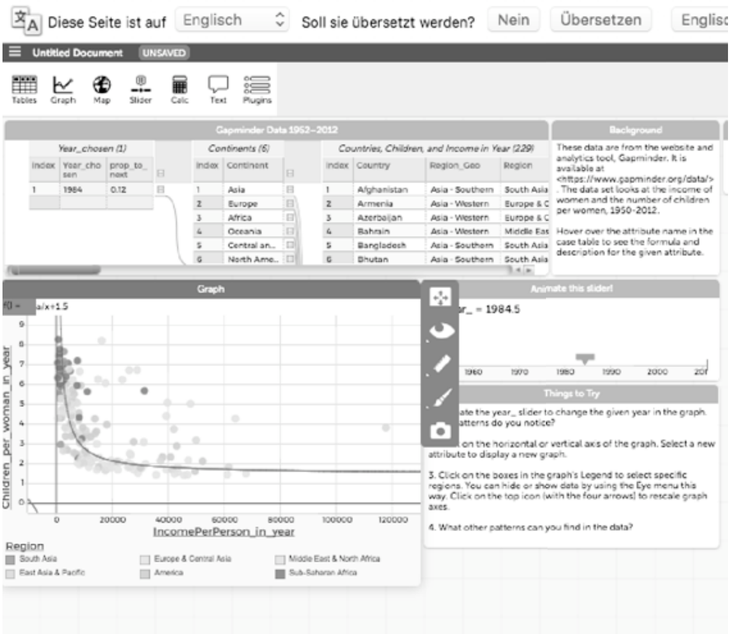


Abb. 3: Gibt es einen Zusammenhang zwischen dem Durchschnittseinkommen in Ländern dieser Welt und der Reproduktionsrate (Anzahl Kinder pro Frau)? Darstellungen mit CODAP

William Finzer (2013), der Entwickler von CODAP, nennt als zentrales Ziel einer Bildung in Data Science die Stärkung einer Reihe von Denkgewohnheiten („habits of mind“):

- Erkenne die Notwendigkeit von Daten zum Gewinnen neuer Einsichten an. Halte Ausschau nach weiteren Daten: Welche Daten könnten hilfreich sein, um zu Schlussfolgerungen zu kommen, um Einsicht zu gewinnen oder Argumente aufzubauen?
- Stell die Daten graphisch dar: entwerfe graphische Darstellungen, die potentiell nützliche Muster in den Daten hervorheben; Muster, die beim Starren auf Tabellen schwer zu erkennen sind.
- Stell neue Fragen, erkunde Zusammenhänge und suche mittels unterschiedlicher Visualisierungen und Berechnungen nach Antworten.

- Nutze (und erfinde neue) Maße und Kenngrößen. Erkunde und erzähle Geschichten, die hinter den Daten stecken.
- Warum unterscheiden sich die Daten? Gibt es systematische Gründe, oder sind die Schwankungen eher zufällig? Gibt es weitere Einflussgrößen, die den Zusammenhang zwischen zwei Variablen vermitteln oder erklären können?
- Entwickle einen kritischen Standpunkt bezüglich Qualität und Herkunft der Daten. Wie wurden die Daten erhoben? Wie wurden die Variablen definiert? Wie wurden Konstrukte operationalisiert? Und warum, mit welchem Zweck und in wessen Interesse wurden die Daten überhaupt erhoben?

Schüler sollen wissen, dass Daten und Informationen von großen Erhebungen durch anerkannte Organisationen verfügbar sind und zum Gewinnen von Erkenntnissen und Einsichten genutzt werden können. Wenn sie eine Statistik in den Nachrichten, den sozialen Medien oder einer Website sehen, dann sollten sie wissen, wie man die Quelle prüft und entscheidet, wie vertrauenswürdig die berichteten Informationen sind. Blindes, unkritisches Vertrauen in Daten ist nicht weniger gefährlich wie eine Ablehnung von Evidenzbasierung schlechthin auf Grundlage von Misstrauen in jede Statistik.

Data Science Education und Zivilstatistik: Erfahrungen aus dem Projekt ProCivicStat

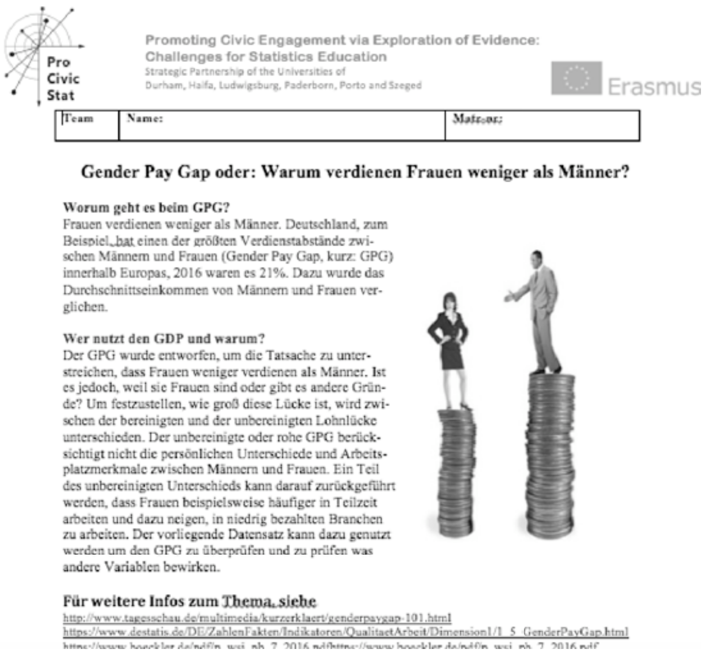
In einer zunehmend komplexeren Welt ist das Engagement von Zivilbürgern eine kritische Ressource bei öffentlichen Entscheidungen auf internationalem, nationalem wie lokalem Niveau. In Erweiterung des Begriffs „mathematische Bildung“ konzipiert die vom EU-Erasmus+ Programm seit September 2015 geförderte internationale Kooperation ProCivicStat eine als Zivilstatistik bezeichnete Teildisziplin, in deren Mittelpunkt die Sinnerschließung aus Daten steht, die über gesellschaftliche Vorgänge informieren. Ein Verstehen dieser oft komplexen und multivariaten Daten setzt Kenntnisse voraus, die im regulären Mathematik- und Statistikunterricht, geschweige denn in Politik oder Gemeinschaftskunde gewöhnlich nicht vermittelt werden. Kompetenzen im Bereich

Zivilstatistik sind zur informierten Partizipation in demokratischen Gesellschaften nötig. Im EU-Projekt ProCivicStat werden neben konzeptionellen Entwürfen zum Verstehen multivariater Phänomene in einer datenreichen Welt authentische und relevante Datensätze bereitgestellt sowie Lehr- und Lernmaterialien für innovatives Unterrichten für ein breites Spektrum von Zielgruppen entwickelt und erprobt. Das ultimative Ziel des Projektes ist die Stärkung der Zivilgesellschaft, die Befähigung von informierten Bürgern zur evidenzbasierten Entscheidungsfindung und zivilgesellschaftlichen Engagement. Lehrmaterialien, umfangreiche Datensätze und konzeptionelle Darstellungen von Zivilstatistik sind verfügbar über die Website www.procivicstat.org.

Am Standort Ludwigsburg wurden zu einer Reihe von Themenfeldern Materialien für Lehrende und Lernende entwickelt, die neben einer inhaltlichen kontextbezogenen Einführung Verweise auf weiterführende Informationen zur Vertiefung umfangreiche Datensätze mit Aufgaben und konkreten Arbeitsaufträgen zur Datenanalyse beinhalten. Ein Link auf ein elektronisches Arbeitsblatt erlaubt dann die Bearbeitung der Fragestellungen mit Hilfe der Software CODAP. Exemplarisch seien die folgenden Themenfelder genannt (Entsprechende Arbeitsblätter sind über www.procivicstat.org zugänglich): Gender Pay Gap: Warum verdienen Frauen weniger als Männer (siehe Abbildung 4)? Sind Schiedsrichter im europäischen Fußball rassistisch? Hat die Zahl der Straftaten in Deutschland im Zuge der Flüchtlingswelle von 2015 zugenommen? Haben Frauen mit höherer Grundbildung weniger Kinder?

Die Bearbeitung der Arbeitsblätter verlangt neben grundlegendem mathematischem und statistischem Wissen auch statistische Fähigkeiten, die im traditionellen Unterricht kaum behandelt werden wie z. B. multivariates Denken, die Suche nach verborgenen Drittvariablen und Interaktionen sowie Simpsons Paradox, die Erkundung funktionaler Beziehungen zwischen Variablen und die Nutzung von unterschiedlichen Darstellungen und Visualisierungen. Die Bearbeitung erfordert kritisches Denken: Wie wurden Variable definiert? Wie Konstrukte (z.B. Armutsrisiko oder Arbeitslosigkeit) operationalisiert? Auf welche Weise und aus welchem Grund wurden die Daten erhoben?

Mit Hilfe von CODAP können neue Variable definiert, Variable transformiert und aggregiert werden. Hierarchisch geordnete Daten lassen sich mit einfachen Drag-und-Drop Bewegungen umstrukturieren. Untersuchungen und der Vergleich von Untergruppen sind durch Ausblenden von Daten problemlos möglich. Visualisierungen, z.B. zum Vergleich von Verteilungen oder zur Erkundung wie zwei Variable ko-variieren, sind auf der Basis der graphischen Benutzeroberfläche ohne Programmcode zu erstellen, inklusive der Einpassung von Kurven in Streudiagramme.



Pro Civic Stat

Promoting Civic Engagement via Exploration of Evidence:
Challenges for Statistics Education
Strategic Partnership of the Universities of
Durham, Haifa, Ludwigsburg, Paderborn, Porto and Szeged

Erasmus

Team	Name:	Matr.nr.:

Gender Pay Gap oder: Warum verdienen Frauen weniger als Männer?

Worum geht es beim GPG?
Frauen verdienen weniger als Männer. Deutschland, zum Beispiel, hat einen der größten Verdienstabstände zwischen Männern und Frauen (Gender Pay Gap, kurz: GPG) innerhalb Europas, 2016 waren es 21%. Dazu wurde das Durchschnittseinkommen von Männern und Frauen verglichen.

Wer nutzt den GDP und warum?
Der GPG wurde entworfen, um die Tatsache zu unterstreichen, dass Frauen weniger verdienen als Männer. Ist es jedoch, weil sie Frauen sind oder gibt es andere Gründe? Um festzustellen, wie groß diese Lücke ist, wird zwischen der bereinigten und der unbereinigten Lohnlücke unterschieden. Der unbereinigte oder rohe GPG berücksichtigt nicht die persönlichen Unterschiede und Arbeitsplatzmerkmale zwischen Männern und Frauen. Ein Teil des unbereinigten Unterschieds kann darauf zurückgeführt werden, dass Frauen beispielsweise häufiger in Teilzeit arbeiten und dazu neigen, in niedrig bezahlten Branchen zu arbeiten. Der vorliegende Datensatz kann dazu genutzt werden um den GPG zu überprüfen und zu prüfen was andere Variablen bewirken.

Für weitere Infos zum Thema, siehe
http://www.tagesschau.de/multimedia/kurzerklaert/genderpaygap-101.html
https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/Indikatoren/QualitaetArbeit/Dimension1/1_5_GenderPayGap.html

Abb.4: Kopf des Arbeitsblattes „Warum verdienen Frauen weniger als Männer“: Weitere komplette Arbeitsblätter mit Link zu Datensätzen und zum CODAP Analysetool sind über www.procivicstat.org verfügbar.

Das Verstehen multivariater Daten wird durch moderne statistische Methoden und Darstellungsformen wesentlich unterstützt. Klassifikations- und Regressionsbäume (engl. Classification and Regresson Trees – kurz CART) sind eine Methode, die für die Untersuchung solch komplexer Daten speziell geeignet ist (Breiman et al., 1984). Die Interpretation dieser

Bäume ist recht einfach, aber die Erstellung der Bäume basiert auf sehr rechenintensiven Algorithmen, die die Grundlage für tiefer gehende Methoden des Statistical Learning unter klangvollen Namen wie Bagging, Boosting und Random Forests sind (Hastie et al. 2006). CODAP unterstützt mit Hilfe des in Zusammenarbeit mit Tim Erickson in Ludwigsburg entwickelten Plug-Ins „EasyTree“ das Verständnis dafür, wie Klassifikations- und Regressionsbäume konstruiert werden und erleichtert damit die Interpretation von Baumstrukturen. Abbildung 5 zeigt einen mit EasyTree erstellten Regressionsbaum, der die Abhängigkeit der Anzahl roter Karten pro Spiel („RedCardsRate“) im europäischen Fußball von den Kovariablen Hautfarbe, Liga (England, Frankreich, Deutschland oder Spanien) und der Position des Spielers zeigt. Bezüglich weiterer Details baumstrukturierter statistischer Methoden muss auf die Literatur (Breiman et al 1984, Hastie et al. 2006) oder die Website www.procivicstat.org verwiesen werden.

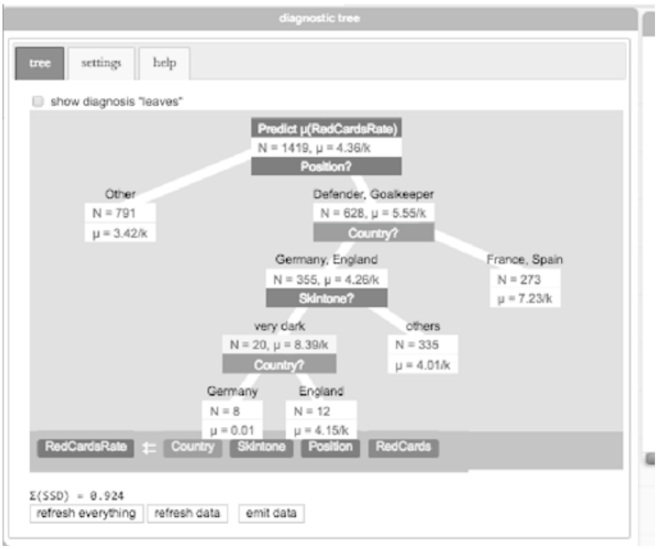


Abb. 5: Regressionsbaum für die Zahl roter Karten pro Spiel in Abhängigkeit von Hautfarbe und Position des Spielers sowie europäischer Liga (erstellt mit CODAP).

Initiativen wie data.gov in den USA und data.gov.uk im Vereinigten Königreich zielen darauf ab, demokratische Prozesse zu unterstützen, indem sie Bürgern Zugang zu Daten gewähren, Debatten anregen und über politische Mitgestaltungsmöglichleiten informieren. Viele namhafte Datenanbieter (z. B. nationale Statistikbüros, Eurostat und OECD) machen Daten öffentlich zugänglich - aber der Zugriff und die direkte Bearbeitung dieser Datensätze erfordert oftmals ein beträchtliches Fachwissen. Wie lassen sich Daten in verfügbare Software importieren? Oft sind die Daten in einem Format, das sich einer direkten Weiterverarbeitung noch verschließt. Die Kurierung und Reinigung von Daten erfordert einiges an informatischem Wissen und die Nutzung geeigneter Tools. Zivilstatistik erfordert ein Verständnis von analytischen Techniken, die für den Zugriff und die Analyse von multivariaten und unstrukturierten Daten geeignet sind. Informatische Kenntnisse sind erforderlich, um mit Visualisierungs- und Statistikprogrammen zu arbeiten. Schüler und Studierende müssen dabei lernen, interaktive Darstellungen gezielt zu nutzen.

Die Vorbereitung dieses Beitrags wurde in Teilen finanziert mit Unterstützung der Europäischen Kommission. Diese Veröffentlichung stellt lediglich die Ansichten des Verfassers dar und die Kommission ist nicht verantwortlich für irgendwelche Ansichten, die sich aus den hier geäußerten Informationen ergeben.

Literatur

Anderson, C. (2008). The end of theory: the data deluge makes the scientific method obsolete. Wired magazine. http://www.wired.com/2008/06/pb-theory/. Zugegriffen: 1. 12. 2017.

Breiman, L. (2001). Statistical modeling: The two cultures (with comments and a rejoinder by the author). Statistical Science, 16(3), 199–231.

Breiman, L., Friedman, J.H., Olshen, R.A., and Stone, C.I. (1984). Classification and regression trees. Belmont, California: Wadsworth.

Budgett, S. & Rose, D. (2017). Developing Statistical Literacy in the Final School Year. Statistics Education Research Journal, 16(1), 139-162,

Cleveland (2001). Data Science: An Action Plan for Expanding the Technical Areas of the field of Statistics, International Statistical Review. 69 (1), 21–26

Donoho, D. (2015). 50 Years of Data Science. Delivered at the John W. Tukey 100th Birthday Celebration, Princeton, Sept. 18, 2015. http://courses.csail.mit.edu/18.337/2015/docs/50YearsDataScience.pdf

Engel, J. (2017). Statistical Literacy for active citizenship: a call for data science education. Statistics Education Research Journal 16(1), 44-49, [http://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ16(1)_Engel.pdf]

Engel, J. (Ed.) (2016). Promoting understanding of statistics about society. Proceedings of the IASE Roundtable, Berlin 2016. [Online: www.iase-web.org/Conference_Proceedings.php]

Finzer, W. (2013). The data science education dilemma. Technology Innovations in Statistics Education, 7(2). [Online: www.escholarship.org/uc/uclastat_cts_tise]

Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2008). The Elements of Statistical Learning. Data Mining, Inference and Prediction (2. Ed.). New York: Springer.

Tukey, J. (1977). Exploratory Data Analysis. Reading, MA: Addison Wesley.

Bildnachweise:

Abbildung 1: https://bestcase.files.wordpress.com/2017/02/finzer-ds-venn.png?w=327&h=310

Abbildung 2: www.gapminder.org

Abbildung 3, 4 und 5: privat

Digitale Werkzeuge gemeinsam entwickeln: Ansätze und Erfahrungen aus interdisziplinärer Zusammenarbeit im MAL-Projekt

Thomas Janßen

Im MAL-Projekt (Multimodal Algebra lernen) an der Universität Bremen arbeiten Mathematikdidaktiker_innen mit Expert_innen für Mensch-Computer-Interaktion zusammen, um sogenannte Tangibles zu entwickeln – intelligente, physisch manipulierbare Objekte, die Schüler_innen beim Einstieg in die Algebra helfen sollen. Die Mathematikdidaktik kann von einer solchen interdisziplinären Verzahnung der Entwicklung von Technik und fachdidaktisch fundierter Lernaktivitäten methodisch und theoretisch profitieren. Der vorliegende Beitrag gibt dafür ein Beispiel aus der Forschungspraxis. Darüber hinaus wird auf eine Auswahl von Grenzobjekten eingegangen, die sich in der interdisziplinären Arbeit ergeben haben.

Einleitung

Das Lernen mit körperlich erfahrbaren Materialien hat in der Mathematikdidaktik eine lange Geschichte, die bis in die Tage der Reformpädagogik reicht. Für eine neuerliche wissenschaftliche Auseinandersetzung mit solchen Ansätzen sprechen zwei Entwicklungen: Zum einen stützt die neurologische Forschung der letzten Jahrzehnte die Einbeziehung des gesamten Körpers in die Beforschung von (mathematischem) Wissen und Lernen (Lakoff & Núñez, 2000; Sabena, 2007; de Freitas & Sinclair, 2014). Zum anderen sind dank technischer Weiterentwicklungen neuartige Gegenstände denkbar, mit denen gelernt werden kann: Sie können mit Sensorik und Ausgabekanälen (Ton, LEDs, Vibration etc.) ausgestattet zu sogenannten Tangibles werden, die Feedback zu den mit ihnen durchgeführten Handlungen geben können. Im MAL-Projekt an der Universität Bremen[1] arbeiten Mathematikdidaktiker_innen mit Entwickler_innen aus dem Feld der Mensch-Computer-Interaktions-Forschung (englisch Human Computer Interaction, kurz HCI) zusammen, um ein System mit solchen Tangibles zu entwickeln, das Schüler_innen beim Erlernen elementarer Zusammenhänge der Schulalgebra helfen soll.

1Das MAL-Projekt wird durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung in der Förderlinie „Erfahrbares Lernen“ gefördert.

Im Folgenden wird kurz dargelegt, inwiefern im MAL-Projekt eine doppelte Designforschung stattfindet. Im Anschluss wird anhand zweier Beispiele erläutert, wie die Mathematikdidaktik von einer derart angelegten interdisziplinären Forschung profitieren kann und worin spezifische Herausforderungen liegen.

Doppelte Designforschung

In vielen Forschungsprojekten und Schulbuchverlagen werden didaktisch begründeten Anforderungen an technische Dienstleister übergeben, die dann das gewünschte Produkt im Rahmen ihrer Möglichkeiten herstellen. Im Gegenzug erkunden Mathematikdidaktiker_innen die Eignung bereits vorhandener technischer Produkte für neue Unterrichtsgänge. Die Arbeitsweise in diesen Fällen ist additiv, in separaten Prozessen organisiert. Das Risiko eines solchen Vorgehens ist, dass die Eigenlogik der Entwicklung in dem jeweiligen Bereich – also der Entwicklung der Technik oder des Unterrichts – Priorität über den anderen Bereich gewinnt und wichtige Aspekte der jeweils anderen Seite unberücksichtigt bleiben. Das kann dazu führen, dass für die jeweiligen Expert_innen sichtbare Potenziale nicht genutzt werden. Deshalb kann eine doppelte Designforschung, in der die Entwicklung aus beiden Bereichen gemeinsam gedacht wird, sinnvoll sein – umso mehr, je weniger Didaktiker_innen noch in der Lage sind, ansprechende Tools selbst zu erstellen – wie es bei Tangibles zweifellos der Fall ist.

Wenn nun eine solche Kooperation eingegangen wird, muss von Seiten der Mathematikdidaktik verstanden werden, dass die Entwicklung von Tangibles mit offenen Forschungsfragen verbunden ist, die für die Disziplin der HCI von Bedeutung sind: Wie lässt sich eine hinreichend große Anzahl an Objekten zuverlässig durch das System verfolgen? Wie kann ein Computerprogramm Umformungen (und nicht nur die jeweiligen Zustände) von Gleichungen „verstehen"? Was sind Möglichkeiten und Grenzen adaptiver Aufgabensammlungen, die abhängig vom beobachteten Umgang mit vorherigen Aufgaben unterschiedliche Verläufe zulassen?

Aus Sicht mathematikdidaktischer Designforschung stellen sich Fragen der Passung zwischen Aufgaben und System: Wie lassen sich die neuen technischen Möglichkeiten – zusätzliche Freiheitsgrade gegenüber rein virtuellen Systemen, neue Feedbackmöglichkeiten gegenüber klassischem Lernmaterial – ausschöpfen? Wie können dabei mathematikdidaktische Ansprüche eingefordert und sogar erweitert werden? Wie kann (Selbst-)Differenzierung realisiert werden, welche Anpassungen können und möchten Lehrkräfte vornehmen? Wie lässt sich die spezifische Rolle von Tangibles in der Didaktik der Algebra verorten, gibt es beispielsweise neue Ansätze zur Ausbildung algebraischen Struktursinns (Janßen, 2016)?

Es ergeben sich schließlich auch Forschungsfragen, die für beide Seiten gleichermaßen interessant sind: Wie werden Inhalte und Hinweise – aus Sicht der Didaktik und der Mensch-Computer-Interaktion – optimal dargestellt? Die Möglichkeiten sind hier gegenüber klassischen Lernmaterialien deutlich erweitert, aber unter welchen Bedingungen sind beispielsweise Farbwechsel hilfreich und wann irritieren sie? Wie sollten Schüler_innen Eingaben machen können, welche Vor- und Nachteile haben Freihandtext und -zeichnungen, Eingabefelder und vordefinierte Touch-Gesten? Wie kann Lehrer_innen die Möglichkeit gegeben werden, differenzierte und adaptive Lernumgebungen zu erstellen und rasch Bedürfnisse in der Klasse zu erkennen und auf sie zu reagieren? Wie werden sie befähigt, eigenständig curriculare Entscheidungen (z. B. über den Zeitpunkt der formalen Einführung negativer Zahlen) selbst zu treffen und das System entsprechend zu konfigurieren?

Es wird deutlich, dass sich mindestens die zuletzt genannten Fragen nur werden beantworten lassen, wenn die beteiligten Wissenschaftler_innen eng zusammen arbeiten. Im Folgenden soll zunächst ein Beispiel für Methodenwissen gegeben werden, das im Zuge dieser Zusammenarbeit im MAL-Projekt aus Sicht der Mathematikdidaktik gewonnen werden konnte. Danach wird dargelegt, welche begrifflichen und theoretischen Hürden in dieser interdisziplinären Forschung bislang identifiziert wurden und wie ein fruchtbarer Umgang damit aussehen kann.

Designforschung neu lernen

Mathematikdidaktiker_innen sind vertraut mit Designforschung, also Forschung, die die Entwicklung von Aufgaben einbezieht – seien sie nun selbst Gegenstand der Forschung oder Vehikel für übergeordnete Fragen. Wenn nun gleichzeitig ein technisches Produkt entwickelt wird, besteht eine Chance darin, von den in der Designforschung einer anderen Disziplin etablierten Methoden zu lernen. Ein Beispiel für eine solche Methode ist das Paper Prototyping: Weil es häufig zu aufwändig wäre, mehrere mögliche Varianten eines technischen Systems tatsächlich zu entwickeln, um dann alle bis auf eine zu verwerfen, werden einfache Prototypen entwickelt. Ein Gehäuse kann aus Karton hergestellt werden, ein Bildschirmhintergrund aus Papier. Elemente, die abhängig von der Benutzung des Systems auftreten, werden vorbereitet und von einer damit beauftragten Person in den angemessenen Situationen eingebracht. Dies ermöglicht es, Laien einzubinden, also beispielsweise Kinder oder auch Mathematik-didaktiker_innen ohne technischen Hintergrund. Ohne die technische Umsetzbarkeit sofort in den Blick nehmen zu müssen, können in der Benutzung des simulierten Systems Probleme und Bedarfe identifiziert werden. Durch die Bandbreite der möglichen Teilnehmer_innen solcher Diskussionsrunden erhält man ein hohes Maß an ökologischer Validität im Vergleich zu rein literatur- oder erfahrungsbasierten Entscheidungen.

Das MAL-Projekt stützt sich bei der Entwicklung der Tangibles auf die in Nordamerika häufig eingesetzten Algebra Tiles (Dietiker & Baldinger, 2006). In diesem System können mit Plättchen unterschiedlicher Form und Farbe lineare und quadratische Terme und Gleichungen dargestellt und Umformungen erfahrbar gemacht werden.

In einer ersten Sitzung durften sich Schüler_innen eines 11. Jahrgangs, denen zuvor im Gebrauch der Regeln für den Umgang mit Algebra Tiles instruiert worden waren, als Entwickler_innen betätigen. Die Arbeit mit Außenstehenden – später wurde sie mit nicht am Projekt beteiligten Kolleg_innen aus der Mathematikdidaktik wiederholt – erwies sich als insofern vorteilhaft, dass weitere Ideen zur Gestaltung des Systems, über die der Projektbeteiligten hinaus, eingebracht wurden. Selbstverständlich können und sollen nicht alle von den Schüler_innen benannten Ideen unmittelbar umgesetzt werden. Es erfordert Arbeit unter sorgfältig durchdachten Designprinzipien, die Erkenntnisse aus solchen Paper Prototyping-Sitzungen umzusetzen.

Abb. 1: Schüler_innen entwickeln mit einem Papierprototyp Ideen für die Gestaltung des Systems. Im Handeln mit den (vorgegebenen) Plättchen wurden Schaltflächen und Feedback-elemente (rechts) und Ideen für ihre Benutzung und ihr Verhalten entwickelt. Bild: MAL.

Nicht nur in Fragen der äußerlichen Gestaltung des zu entwickelnden Systems können Papierprototypen nützlich sein: Seit Herbst 2017 werden in Schul- und Hochschulkursen Aufgaben für das zu entwickelnde System erprobt. Da die bislang entwickelten Prototypen noch nicht so weit entwickelt sind, dass Proband_innen damit problemlos arbeiten können, werden dabei wieder Umgebungen aus Papier eingesetzt, die bestimmte Eigenschaften des geplanten Systems simulieren. So können Erfordernisse der Praxis an das System und die Aufgabenstellungen festgestellt werden, bevor das System einsetzbar ist.

Abb. 2: Papierprototyp zur Aufgabenerprobung in der Schule. Das am linken Rand sichtbare Aufgabenblatt könnte später Teil des technischen Systems sein. Bild: MAL.

Die Methode des Paper Prototyping hat Potential, auch in weniger exotischen Settings eingesetzt zu werden, zum Beispiel bei der Erstellung von klassischen Lernspielen und –materialien oder in der gemeinsamen Gestaltung von Postern, Arbeitsblättern und Tafelbildern in Gruppen von (angehenden) Lehrer_innen.

Interdisziplinäre Grenzobjekte

Sowohl Mathematikdidaktik als auch die Mensch-Computer-Interaktion sind selbst erst relativ kürzlich aus Disziplinüberschreitungen entstanden, weisen aber unbestreitbar Merkmale wissenschaftlicher Disziplinen (Konferenzen, Zeitschriften, Professuren etc.) auf und sind somit Beispiel für „(a) a phenomenon of the social world marked by increasing specialization and differentiation of (material and discursive) practices and (b) [as] a form of discourse making the specialization thematic“ (Williams et al., 2016, S. 4).

Forschung, die Disziplingrenzen überschreitet, benötigt gemeinsame Objekte – Grenzobjekte (Akkerman & Bakker, 2011; Williams et al., 2016): Dies sind naiv betrachtet erst einmal die gemeinsam betrachteten Forschungsgegenstände. Schnell wird jedoch deutlich, dass mit diesen Forschungsgegenständen in den beteiligten Disziplinen Theorien und Begriffe verbunden werden. In der gemeinsamen wissenschaftlichen Arbeit sind diese unverzichtbar, um die Forschungsgegenstände überhaupt zu definieren. So enthält schon der Titel des hier beschriebenen Forschungsprojekts den Begriff der Multimodalität.

In der HCI-Forschung werden Modalitäten üblicherweise entweder über die menschlichen Wahrnehmungskanäle definiert (Obrist et al., 2016) oder über die Eingabe- und Ausgabemode, die bei der Nutzung eines technischen Systems zur Verfügung stehen (Oviatt, 2012). In der Mathematikdidaktik hingegen werden bei der Berücksichtigung von Multimodalität häufig in Abhängigkeit vom jeweiligen Lerninhalt weitere Unterscheidungen vorgenommen, etwa zwischen bildlichen Darstellungen einer Realsituation und einem Graphen, die aus HCI-Sicht beide in die gleiche Modalität fallen würden.

Gesten stellen eine Modalität dar, die sowohl in der Mathematikdidaktik als auch in der HCI-Forschung besondere Aufmerksamkeit erfahren hat. In beiden Disziplinen wird sich auf die gleiche Hintergrundtheorie bezogen (u.a. McNeill, 1992). In der Praxis jedoch wird der HCI-Diskurs dominiert durch solche Gesten, die mit der verfügbaren Technik erfassbar sind (auf Touchscreens oder mit Kameras), während die Mathematikdidaktik jegliche Gesten betrachtet, die im Unterricht relevant werden (de Freitas and Sinclair, 2017).

Neben Modalitäten und Gesten wurden im MAL-Projekt weitere Grenzobjekte identifiziert: Designkreisläufe, User, Embodiment, Feedback (vgl. Janßen & Döring, 2017) und Aufgaben.

Die bisher eher unsystematische Gegenüberstellung der unterschiedlichen Interpretationen der im MAL-Projekt relevanten Grenzobjekte hat bereits zu einer Verbesserung des gegenseitigen Verständnisses beigetragen. In Zukunft soll diese Arbeit über die spezifische Erfahrung hinaus fundiert werden, indem die Literatur der beteiligten Disziplinen systematisch gesichtet wird und die verschiedenen Sichtweisen in empirischer Arbeit einander gegenübergestellt werden. Hierbei kann sich an den Vorgehensweisen orientiert werden, die innerhalb der Mathematikdidaktik in der Vernetzung von Theorien entwickelt wurden (vgl. Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014). Gerade in der Disziplin der HCI besteht eine große Offenheit für ein solches Vorgehen, weil es eben nicht nur um die technische Seite eines Systems geht, sondern ein Verständnis für die Interaktion mit den Nutzer_innen angestrebt wird. So kann ein Beitrag zur Schaffung einer gemeinsamen Basis für zukünftige Kooperationen zwischen Mathematikdidaktiker_innen und HCI-Forscher_innen geleistet werden.

Fazit

Wenn Mathematikdidaktiker_innen auch in Zukunft digitale Werkzeuge mitgestalten wollen, werden sie mit Technikexpert_innen zusammenarbeiten müssen. Eine solche Zusammenarbeit ist kein Selbstläufer, sondern verlangt beiderseits Offenheit für andere Sichtweisen und Methoden und die Bereitschaft, sich auf die Arbeit an den interdisziplinären Grenzobjekten einzulassen.

Wir Mathematikdidaktiker_innen können davon profitieren, an unsere Grenzen zu stoßen: Wir gewinnen an Know-how und steigen in den Diskurs zur Schüler-Computer-Interaktion ein. Hier können wir die Vielfalt an robusten Theorien über das Lernen und Lehren von Mathematik an einer Stelle einbringen, an der sich in den kommenden Jahrzehnten viel entwickeln wird. Gleichzeitig kann in der interdisziplinären Zusammenarbeit der theoretische Horizont erweitert werden, beispielsweise durch in der Mathematikdidaktik bisher nicht vertretene Lesarten bereits bekannter Hintergrundtheorien oder durch die sich unweigerlich ergebenen Herausforderungen der Theorie durch die Empirie.

Literatur

Akkerman, S. F. & Bakker, A. (2011). Boundary Crossing and Boundary Objects. Review of Educational Research, 81(2), 132–169.

Bikner-Ahsbahs, A. & Prediger, S. (Hrsg.). (2014). Networking of theories as a research practice in mathematics education. Cham: Springer.

de Freitas, E. & Sinclair, N. (2014). Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom. Cambridge: Cambridge University Press.

de Freitas, E. & Sinclair, N. (2017). Mathematical gestures: multitouch technology and the indexical trace. Auf der CERME10 vorgestelltes Paper. Abrufbar unter keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0525.pdf

Dietiker, L., & Baldinger, E. (2006). Algebra connections. Version 3.1. Sacramento, CA: CPM Educational Program.

Janßen, T. (2016). Ausbildung algebraischen Struktursinns im Klassenunterricht. Lernbezogene Neudeutung eines mathematikdidaktischen Begriffs. Abrufbar unter http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:46-00105386-17

Janßen, T. & Döring, T. (2017). Boundary objects in interdisciplinary research on multimodal algebra learning. In G. Aldon & J. Trgalová (Hrsg.): Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (S. 447-448). Lyon: ENS de Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1 & Institut Français de l´Éducation.

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books.

McNeill, D. (1992). Hand and mind: What gestures reveal about thought. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Obrist, M., Velasco, C., Vi, C., Ranasinghe, N., Israr, A., Cheok, A., … (2016). Sensing the future of HCI: Touch, taste, and smell user interfaces. interactions, 23(5), 40–49.

Oviatt, S. (2012). Multimodal interfaces. In J. A. Jacko (Hrsg.), The human-computer interaction handbook: Fundamentals, evolving technologies and emerging applications (3. Aufl.) (S. 405–429). Boca Raton, FL: CRC Press.

Sabena, C. (2007). Body and signs: A multimodal semiotic approach to teaching–learning processes in early calculus. Dissertation. Turin: Turin University.

Williams, J., Roth, W.-M., Swanson, D., Doig, B., Groves, S., Omuvwie, M., … (2016). Interdisciplinary mathematics education. A state of the art. Cham: Springer.

Digitales Lernen mit Wiki-basierten Lernpfaden: Konzeption eines Lernpfads zu Quadratischen Funktionen

Elena Jedtke

Anhand eines selbst konzipierten Lernpfads zu Quadratischen Funktionen werden Möglichkeiten für digitales Lernen im Unterricht aufgezeigt. Dazu wird eine Plattform der Zentrale für Unterrichtsmedien im Internet (ZUM) genutzt. Das ZUM-Wiki zählt zu den Open Educational Resources und basiert auf der Mediawiki-Software, die mit speziellen Bausteinen für den Unterricht kombiniert wird. Durch die Integration interaktiver Applets, metakognitiver Komponenten und verschiedener Feedbackvarianten soll der konzipierte Lernpfad insbesondere eigenständiges und reflektiertes Lernen ermöglichen.

Theoretische Grundlagen

Im ersten Abschnitt werden die theoretischen Grundlagen für die Konzeption eines Lernpfads zu quadratischen Funktionen dargestellt. Zunächst wird thematisiert, welches Verständnis von digitalem Lernen zugrunde gelegt wurde. Ergänzend wird die Aktualität dieser Thematik aufgezeigt. In dem folgenden Abschnitt wird erläutert, was wir unter Lernpfaden verstehen und welche Qualitätskriterien bei der Erstellung unseres Lernpfads berücksichtigt wurden. In dem letzten Abschnitt der theoretischen Grundlagen werden generelle Vorstellungen und kognitive Hürden bei der Behandlung quadratischer Funktionen beschrieben.

Digitales Lernen

Anstelle des Begriffs digitales Lernen wird in der Literatur häufig der Begriff E-Learning genutzt (vgl. Arnold, Kilian, Thillosen & Zimmer 2015, Niegemann, Domagk, Hessel, Hein, Hupfe & Zobel 2008). Gleichzeitig wird jedoch kritisiert, dass dieser Begriff nicht aus der Wissenschaft, sondern aus dem Marketing-Bereich stammt (Niegemann et al. 2008). Für die Begriffsklärung wird hier daher auf den Begriff E-Learning zurückgegriffen, im Anschluss jedoch von digitalem Lernen gesprochen. Arnold et al. (2015) formulieren folgende Definition (S. 22):

> *Mit dem Begriff E-Learning wird ein vielgestaltiges gegenständliches und organisatorisches Arrangement von elektronischen bzw. digitalen Medien zum Lernen […] bezeichnet. […] Die elektronisch arrangierten digitalen Lernmedien präsentieren den Lernenden die Lerninhalte multimedial und ermöglichen ihnen deren interaktive Bearbeitung, sei es in vorgegebenen Instruktionsstrukturen oder in Netzstrukturen für selbstgesteuertes individuelles, kooperatives oder partizipatives Lernen.*

Im Zusammenhang mit digitalem Lernen tritt häufig der Begriff des multimedialen Lernens auf. Geprägt wurde dieser Begriff von Mayer (2014), der ihn allgemein für das Lernen mit verschiedenen Visualisierungen einführt. Mayers (2014) Ausführungen können insofern auf digitales Lernen angewandt werden, als die digitalen Lerninhalte insbesondere verschiedene Visualisierungen beinhalten. Jedoch ist in seinem Verständnis nicht jedes multimediale Lernen digital, d. h. auch eine analoge Kombination von zum Beispiel Text und Bildern zählen als multimediale Lerninhalte (ebd.). An dieser Stelle gilt es anzumerken, dass sowohl in dem Verständnis von Arnold et al. (2015) als auch in dem von Mayer (2014) nicht das Lernen selbst als digital bezeichnet wird, sondern viel mehr sind damit die Werkzeuge gemeint, die genutzt werden. Das (digitale) Lernen selber wird als ein kognitiver Prozess angesehen, bei dem digitale Werkzeuge eingesetzt werden.

Digitales Lernen trat 2016 durch Beschlüsse von BMBF und KMK vermehrt in das Bewusstsein der Öffentlichkeit. Unter anderem wird der Einsatz digitaler Bildungsmedien in Schule und Weiterbildung thematisiert (BMBF 2016, KMK 2016). Neben der konkreten Benennung beispielhafter Instrumente für digitales Lernen, wie Open Educational Resources (OER), werden Potentiale und Aufgabenfelder formuliert. Potentiale digitaler Bildungsmedien ergeben sich laut der KMK (2016) insbesondere durch ihre „Multimedialität, Interaktivität, Vernetzung, Feedbackmöglichkeiten und individuelle Verfügbarkeit“ (S. 30). Als Handlungsfelder in diesem Bereich werden die Punkte Qualität, Technik und Recht genannt (KMK 2016, S. 31 ff.). Beispielhaft sei hier ein zentraler Qualitätsaspekt, der sich in beiden Veröffentlichungen wiederfindet, genannt: Die Inhalte sollen nicht den digitalen Medien angepasst werden, sondern es geht darum „passgenaue didaktische Konzepte“ (BMBF 2016, S. 13) zu erarbeiten, die eine lehrplankonforme, „sinnvolle Verknüpfung mit klassischen Bildungsmedien“ (BMBF 2016, S. 20) ermöglichen (vgl. KMK 2016, S. 31).

Lernpfade

Der Begriff Lernpfad wird im Allgemeinen als ein Oberbegriff für computer- und webbasierte Lernangebote verwendet (z. B. Balacheff & Kaput 1996; Leibniz-Institut für Wissensmedien 2016). Roth (2015) gibt eine präzisere Definition für Lernpfade. Demnach bieten Lernpfade strukturierte Wege durch eine Reihe von aufeinander abgestimmten Arbeitsaufträgen, welche Lernende dazu einladen, selbstständig und eigenverantwortlich zu arbeiten (Roth 2015, S. 8). Neben interaktiven Materialien, wie zum Beispiel (GeoGebra-)Applets, die in Lernpfaden eine zentrale Rolle einnehmen, wird die Integration von Hilfen und Ergebnispräsentationen als vielversprechende Möglichkeiten zur Unterstützung der eigenständigen Lernprozesse in einem Lernpfad angesehen (ebd.). Wiesner und Wiesner-Steiner (2015) führten eine Explorationsstudie durch, mit dem Ziel zentrale Funktionen von Lernpfaden aufzudecken. Dafür führten sie Interviews mit Personen aus verschiedenen Nutzergruppen wie beispielsweise Experten und Schüler*innen. Für die Experteninterviews wurden dabei unter anderem Schwerpunkte auf die technischen und didaktischen Funktionen von Lernpfaden gelegt. Dabei ergab sich beispielsweise, dass auf technischer Ebene die Integration dynamischer Inhalte und die Möglichkeit für direktes Feedback besonders hervorgehoben wurden. Auf didaktischer Ebene fanden insbesondere metakognitive Aktivitäten und Reflexionsaufgaben Erwähnung. Bisher gibt es noch keine vorgeschriebenen Design- und Gütekriterien für die Entwicklung von OER (KMK 2016). Ein erster Vorschlag der KMK (2016) lautet, dass digitale Bildungsmedien zum einen inhaltlich korrekt und lehrplankonform sein sollen. Des Weiteren sollten sie kompetenzorientiertes Unterrichten und individuelles Lernen ermöglichen sowie die Eigenschaften Multimedialität, Interaktivität, Vernetzbarkeit, Veränderbarkeit und Teilbarkeit aufweisen (ebd.). Zusätzlich zu den gerade genannten Qualitätsaspekten werden technische und rechtliche Aspekte als Handlungsfelder aufgeführt (ebd.). Darunter fallen beispielsweise Überlegungen zu hybriden oder parallelen Nutzungsweisen digitaler und analoger Bildungsmedien. Es sollte keine vollständige Verdrängung letzterer angestrebt werden (ebd.). Diese allgemeinen Aussagen über die Gestaltung von digitalen Bildungsmedien und OER kann mithilfe eines Kriterienkatalogs für solche Lernpfade spezifiziert werden, die auf der Mediawiki-Software basieren. Dieser Kriterienkatalog wurde 2006 in einem „Wiener Treffen zu Lernpfaden" in einer Expertenrunde entwickelt und von der Arbeitsgruppe Mathematik digital (2006) veröffentlicht. Die dort gesammelten Kriterien für einen guten Lernpfad beziehen sich auf die Aspekte Inhalt, Schülerorientierung und -aktivitäten, Oberfläche, Medieneinsatz und Angebote für Lehrkräfte (ebd.). Alle oben genannten Qualitätsaspekte finden sich darin wieder und werden durch weitere ergänzt und spezifiziert: Schüleradäquate Sprache, Lernzieltransparenz, Feedback, Differenzierungsangebote und zieladäquater Medieneinsatz, wie insbesondere die Nutzung von Papier und Bleistift, um nur einige der Kriterien zu nennen. Nach Roth (2015) werden „existierende Lernumgebungen […] in der Regel nicht alle diese Kriterien erfüllen, müssen sich aber trotzdem an ihnen messen lassen" (S. 14).

Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen spielen eine zentrale Rolle im Mathematikunterricht weiterführender Schulen in Deutschland (MSW NRW 2007). Entsprechend gibt es eine Vielfalt didaktischer Überlegungen zu diesem Thema. Eine zentrale Überlegung befasst sich mit der Idee des funktionalen Denkens. Der Aufbau diesbezüglicher Vorstellungen kann in der Sekundarstufe I unter anderem bei der Behandlung quadratischer Funktionen aufgebaut werden. Dabei werden verschiedene Punkte genannt, mit denen der Begriff „funktionales Denken" beschrieben und an das mathematische Verständnis des Funktionsbegriffs gebunden wird (Vollrath 1989, 2014). An dieser Stelle wird insbesondere auf die „Grundvorstellungen zu Funktionen" (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm, Weigand 2016, S. 70) eingegangen. Vollrath (1989, 2014) und Malle (2000) verwenden hier den Begriff Aspekte. Ein Vergleich mit den Erläuterungen zu den Begrifflichkeiten, die von vom Hofe (1996, 2016) und Greefrath et al. (2016) angeführt werden, stellt heraus, dass das zugrunde gelegte Verständnis von Vollraths (1989, 2014) und Malles (2010) Nutzung des Begriffs Aspekte mit dem der Grundvorstellungen bei den anderen Autoren übereinstimmt, so dass im Folgenden von letzteren gesprochen werden kann. Für Funktionen werden drei verschiedene (universelle) Grundvorstellungen angenommen: die Zuordnungs-, die Kovariations- und die Objektvorstellung (Vollrath 1989, 2014, Malle 2000, Greefrath et al. 2016). Die Zuordnungsvorstellung besagt, dass jedem Element aus der Zielmenge genau ein Element der Definitionsmenge zugeordnet wird. Der Begriff Kovariation beinhaltet die Vorstellung, wie sich eine Größe ändert, wenn eine zweite Größe variiert wird. Mit der Objektvorstellung wird beschrieben, das Funktionen als ein einziges Objekt gesehen werden, das einen Zusammenhang als Ganzes beschreibt (Greefrath et al. 2016). Letztgenannte Vorstellung wird in Deutschland vor allem in der Sekundarstufe II thematisiert (Greefrath et al. 2016). In der Sekundarstufe I werden folglich vor allem die anderen beiden Grundvorstellungen angesprochen. Mit Blick auf spezifische Vorstellungen zu quadratischen Funktionen identifiziert Zaslavsky (1997) fünf kognitive Hürden (S. 30–33): Die erste Herausforderung betrifft die Interpretation graphischer Informationen. Bei der zweiten geht es um die Beziehungen zwischen quadratischen Funktionen und Gleichungen. Die dritte Hürde besteht in einer angenommenen Analogie von linearen und quadratischen Funktionen und die letzten beiden beziehen sich auf Situationen in denen ein Parameter Null ist bzw. auf die Überbetonung einer einzelnen Koordinate spezieller Punkte. Des Weiteren berichtete Nitsch (2015) über Lernschwierigkeiten im Zusammenhang mit Darstellungswechseln bei funktionalen Zusammenhängen. Eine der von ihr aufgedeckten Herausforderungen bezieht sich auf das Verständnis von Parametereinflüssen auf die graphische Repräsentation quadratischer Funktionen (Nitsch 2015). Daran anknüpfend sei auf Vollrath und Roth (2012) verwiesen, welche die systematische Variation von Parametern als eine Möglichkeit benennen das Verständnis zu fördern. Dies könne beispielsweise durch die Arbeit mit Schiebereglern in dynamischer Geometriesoftware (DGS) ermöglicht werden.

Lernpfad Quadratische Funktionen erkunden

In diesem Abschnitt wird veranschaulicht, wie die oben geschilderten theoretischen Ausführungen in der Praxis umgesetzt wurden und welche Designprinzipien generell möglich sind. Die Aufgaben im Lernpfad wurden gezielt so entworfen, dass auf bekannte kognitive Herausforderungen im Bereich quadratischer Funktionen eingegangen und versucht wird, diese zu überwinden. Konkret werden in diesem Abschnitt die Inhalte des Lernpfads sowie Aufgabenarten und Feedbackvarianten erläutert. Für die Erstellung des Lernpfads Quadratischen Funktionen erkunden nutzten wir die OER-Webseite der Zentrale für Unterrichtsmedien im Internet (ZUM-Wiki, https://wiki. zum.de/wiki/Hauptseite). Diese Plattform gilt insgesamt als „sehr weitreichende und gut gepflegte Umgebung“ (Vollrath & Roth 2012, S. 155). Lernumgebungen im ZUM-Wiki unterliegen der Creative Commons-Lizenz CC-by-sa 3.0. Dies bedeutet, dass die Lernpfade von angemeldeten Benutzern kopiert und verändert werden können. Gleichzeitig werden im ZUM-Wiki alle Versionen des Lernpfads online gespeichert, so dass jede unerwünschte Änderung durch eine Reaktivierung älterer Versionen rückgängig gemacht werden kann. Zudem besteht die Möglichkeit, einen existierenden Lernpfad unter bestimmten Bedingungen vor Bearbeitungen zu „schützen“.

Inhalt

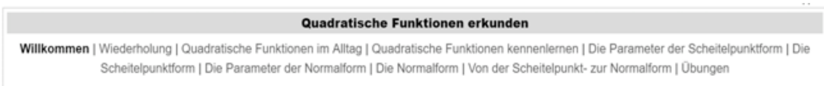


Abb. 1: Übersicht der Abschnitte in dem Lernpfad Quadratische Funktionen erkunden.

Aktuell besteht der Lernpfad aus zehn Kapiteln, wie in Abb. 1 zu sehen ist. Bevor die Arbeit mit den mathematischen Inhalten des Lernpfads beginnt, werden technische Hinweise gegeben und sowohl vorausgesetzte als auch zu erreichende Kompetenzen transparent gemacht (Willkommen). Nach einem Hinweis zum Zeitmanagement werden die Schüler*innen dazu aufgefordert, mit der Arbeit am Lernpfad zu beginnen. Für den Fall, dass eine Lernende oder ein Lernender Unsicherheiten bezüglich der vorausgesetzten Kenntnisse aufweist, gibt es ein Kapitel, in dem diese Fertigkeiten noch einmal geübt werden können (Wiederholung). Dabei handelt es sich um Inhalte zu funktionalem Denken im Allgemeinen sowie zu linearen Funktionen. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, direkt mit den Einführungskapiteln Quadratische Funktionen im Alltag und Quadratische Funktionen kennenlernen zu beginnen. Ersteres setzt den Fokus auf motivationale Effekte, indem verschiedene Alltagsbeispiele aufgezeigt und die Lernenden dazu aufgefordert werden, in ihrer eigenen Umgebung weitere „parabelförmige Bögen" zu finden. In dem anderen genannten Kapitel wird die einfachste Form quadratischer Funktionen, $f(x) = x^2$, eingeführt. Nachdem die Schüler*innen diese Form kennengelernt haben, werden sie Schritt für Schritt an zwei Darstellungsformen komplexerer quadratischer Funktionen, die Scheitelpunkt- und die Normalform, herangeführt. Dafür werden die Parameter zunächst jeweils einzeln eingeführt (Die Parameter der Scheitelpunktform bzw. Die Parameter der Normalform) und anschließend in je einem weiteren Kapitel miteinander verknüpft (Die Scheitelpunktform bzw. Die Normalform). Die Einführung der Parameter geschieht zunächst schrittweise, das heißt es gibt beispielsweise einen Abschnitt zur Streckung bzw. Stauchung einer Parabel, einen weiteren zur Verschiebung in x-Richtung usw. Jeder Abschnitt beginnt mit dem Aufstellen und Überprüfen von Vermutungen über den Einfluss der jeweiligen Veränderung in der Termdarstellung auf die Lage und das Aussehen des Funktionsgraphen. Ergänzt wird dies durch Aufgaben, die der Entwicklung von typischen Fehlvorstellungen entgegenwirken sollen. Die Erkundung verläuft zunächst rein innermathematisch. In den Kapiteln Scheitelpunktform bzw. Normalform werden dann vermehrt auch Anwendungsaufgaben eingesetzt (näheres dazu siehe Abschnitt „Aufgaben"). Das letzte inhaltliche Kapitel Von der Scheitelpunkt- zur Normalform thematisiert, dass es sich bei den beiden zuvor kennengelernten Darstellungsformen um ebensolche handelt und sie somit durch einfache Rechenoperationen ineinander überführt werden können. Das Ende des Lernpfads bildet ein Kapitel mit Übungsaufgaben zu allen vorherigen Themenschwerpunkten (Übungen). Die Schüler*innen bekommen schon zu Beginn der Arbeit mit dem Lernpfad den Hinweis, dass sie jederzeit in dieses Kapitel wechseln können, wenn sie bestimmte Inhalte noch weiter vertiefen wollen. Eine gesammelte Bearbeitung am Ende des Lernpfads ist allerdings genauso möglich. Generell gilt, dass die Lernenden selber entscheiden können, in welcher Reihenfolge sie die Kapitel und die Aufgaben innerhalb eines Kapitels bearbeiten. Die Zeit, die sie mit den einzelnen Aufgaben verbringen, ist ebenfalls frei wählbar. Einige (interaktive) Aufgaben bieten es an, wiederholt bearbeitet zu werden (vgl.

Abb. 2a). Bei anderen Aufgaben kann das Schwierigkeitslevel individuell angepasst werden (vgl. Abb. 2b). Die Schüler*innen können ihre Erkundungen somit ein Stück weit selbstständig und ihren Bedürfnissen entsprechend organisieren. Da der Lernpfad darauf ausgelegt ist, in ein neues Themengebiet einzuführen, ist die Flexibilität jedoch eingeschränkt im Vergleich zu Lernpfaden, die beispielsweise Wiederholungszwecken dienen. Neben der Arbeit am Computer wird den Schüler*innen ein ergänzender Hefter zur Verfügung gestellt. Einige Aufgaben fordern explizit eine Bearbeitung mit Papier und Bleistift, um sicherzustellen, dass die Lernenden weiterhin in motorischen Fertigkeiten, wie dem Zeichnen eines Funktionsgraphen, geschult werden. Der Hefter fasst außerdem die im Lernpfad aufgeführten Merksätze zusammen und bietet Raum für Planungs- und Selbsteinschätzungsaktivitäten zur metakognitiven Unterstützung des eigenverantwortlichen Lernprozesses.

Aufgaben

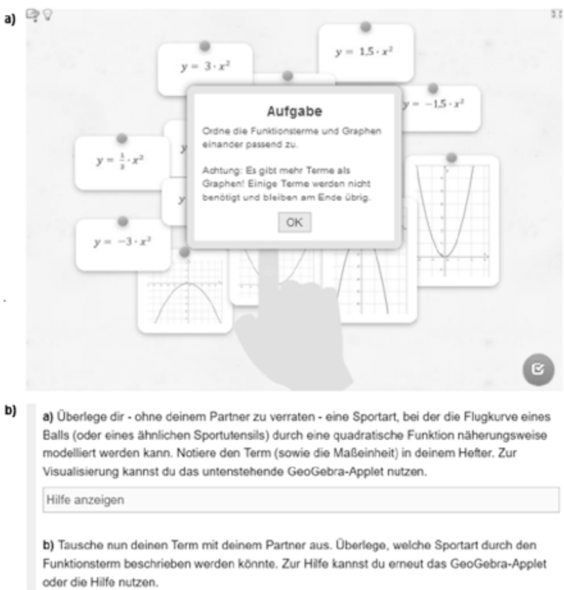


Abb. 2: Exemplarische Aufgaben aus dem Lernpfad Quadratische Funktionen erkunden. a) Interaktive, innermathematische Aufgabe, b) Anwendungsaufgabe. (Quelle: eigener Entwurf)

In dem Lernpfad sind verschiedene Aufgabenformate eingebunden. Neben der Unterscheidung, ob eine Aufgabe interaktiv ist oder nicht, kann zwischen innermathematischen und solchen mit Anwendungsbezug differenziert werden. Die Möglichkeit in Lernpfaden eine Kombination aus interaktiven und analogen Aufgaben bereitzustellen wird insbesondere dazu genutzt, verschiedene Lerntypen anzusprechen, in dem visuelle bzw. motorische Fähigkeiten angesprochen werden. Innermathematische Aufgaben werden in erster Linie dazu genutzt, die einzelnen neuen Themenbereiche quadratischer Funktionen einzuführen und neue Fertigkeiten einzuüben. Ein Beispiel für eine innermathematische Aufgabe wird in Abb. 2a dargestellt. In dieser werden die Lernenden dazu aufgefordert, quadratische Funktionsterme und Parabeln einander zuzuordnen. Wenn sie damit fertig sind, können sie auf den Button unten rechts klicken, um ihr Ergebnis zu kontrollieren. Richtige Zuordnungen werden dabei grün, falsche rot markiert. Es gibt jedoch keine Rückmeldung zu nicht zugeordneten Karten. Durch Anwendungsaufgaben soll das Verständnis der Lernenden vertieft werden. Bei Anwendungsaufgaben werden neben dem Zurückgreifen auf Bekanntes weitere Fertigkeiten gefordert. In Abb. 2b wird eine Aufgabe gezeigt, die auf mathematischer Ebene Wissen über Parametereffekte erfordert, gleichzeitig aber auch zu Kreativität anregt. In der dargestellten Aufgabe werden die Lernenden dazu aufgefordert, sich einen Funktionsterm auszudenken, der ihrer Meinung nach die (idealisierte) Parabel einer frei wählbaren Ballsportart beschreibt. In einem weiteren Schritt werden diese Funktionsterme im Zuge einer Partnerarbeit ausgetauscht und der Partner bzw. die Partnerin versucht, die zugrundeliegende Ballsportart zu identifizieren. In einem letzten Schritt vergleichen die Lernenden ihre Ergebnisse miteinander und reflektieren, wie und warum sie zu ihren Ergebnissen gekommen sind.

Feedbackvarianten

In Abb. 3 ist dargestellt, wie Feedback in dem Lernpfad allgemein aussehen kann. Lösungsfeedback ist entweder direkt in interaktive Applets integriert und kann durch einen Klick auf den blauen Button in der rechten unteren Ecke aktiviert werden (Abb. 3a). In dem Fall erhalten die Schüler*innen eine Rückmeldung dazu, ob ihre Lösung korrekt ist oder noch einmal überdacht werden sollte. Eine weitere Möglichkeit für Lösungsfeedback ergibt sich durch so genannte versteckte Lösungen, die durch einen Mausklick aufgeklappt werden können (Abb. 3b).

Abb. 3: Feedbackvarianten: a) Interaktives Applet mit einem Kontrollbutton, b) Versteckte Hilfen und Lösungen. (Quelle: eigener Entwurf)

Hier stehen dem Verfasser des Lernpfads mehrere Möglichkeiten zur Verfügung, welche Art von Rückmeldung er integrieren möchte. Dies können zum Beispiel Rechnungen, Texte, Skizzen oder Bilder sein. Solche versteckten Lösungen können dementsprechend in ihrer Komplexität variiert werden. Neben dem Lösungsfeedback ist es ebenfalls möglich, Hilfestellungen in den Lernpfad zu integrieren. Dabei steht wiederum sowohl eine Funktion in den interaktiven Applets als auch das Einbinden versteckter Hilfen zur Verfügung. In dem Applet kann vor allem Hilfe in Textform angeboten werden. Diese wird in der Regel durch eine Glühlampe in der linken oberen Ecke eines Applets dargestellt und kann jederzeit aufgerufen werden. Für direkt im Lernpfad versteckte Hilfestellungen gilt das gleiche, wie oben für das Lösungsfeedback beschrieben – sie können frei in ihrer Komplexität variiert werden.

Ausblick

Der in diesem Artikel vorgestellte Lernpfad kommt im Rahmen einer Interventionsstudie in sechs aufeinander folgenden Unterrichtsstunden zur Einführung quadratischer Funktionen zum Einsatz. Während dieser Zeit arbeiten die Schüler*innen eigenständig und in ihrem eigenen Lerntempo an der Thematik. Zur Unterstützung werden unter anderem metakognitive Komponenten zur Planung der Lernzeit eingesetzt. Für nähere Informationen zu dem genauen Forschungsfokus und -design siehe Jedtke (2017).

Literatur

Arnold, P., Kilian, L., Thillosen, A., Zimmer, G. (2015). Handbuch E-Learning. Lehren und Lernen mit digitalen Medien. 4. erw. Auflage, Bielefeld: Bertelsmann.

Balacheff, N., Kaput, J.J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics. In A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds.), International Handbook of Mathematics Education: Part 1 (S. 469–501), doi:10.1007/978-94-009-1465-0_14.

Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) (2016). Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft. Strategie des Bundesministeriums für Bildung und Forschung. Frankfurt am Main: Zarbock.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., Weigand, H.-G. (2016). Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Berlin und Heidelberg: Springer Spektrum.

Jedtke, E. (2017). Feedback in a Computer-Based Learning Environment about Quadratic Functions. Research Design and Pilot Study. In Gilles Aldon, Jana Trgalová (Hrsg.), Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (S. 134–143). Lyon.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2016). Bildung in der digitalen Welt. Strategie der Kultusministerkonferenz. URL: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/ PresseUndAktuelles/2016/Bildung_digitale_Welt_Webversion.pdf (abgerufen im Dez. 2017).

Leibniz-Institut für Wissensmedien. Lernpfad. URL: https://www.e-teaching.org/ materialien/glossar/lernpfad (abgerufen im Dez. 2017).

Mathematik-digital. (2006). Was ist ein guter Lernpfad? - Qualitätskriterien. Hrsg. vom Arbeitskreis Mathematik digital. URL: http://wiki.zum.de/Mathematik-digital/Kriterienkatalog (in der Form vom 18.11.2017).

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. mathematik lehren, 103, 8–11.

Mayer, R.E. (2014). Introduction to Multimedia Learning. In Richard E. Mayer (Hrsg.), The Cambridge Handbook of Multimedia Learning (2. Edition) (S. 1–24). Cambridge: Cambridge University Press.

Ministerium für Schule und Bildung des Landes NRW (MSW NRW) (2007). Kernlehrplan für das Gymnasium. Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. URL: http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/lehrplaene_download/gymnasium_g8/gym8_mathematik.pdf (abgerufen im Dez. 2017).

Niegemann, H. M., Domagk, S., Hessel, S., Hein, A., Hupfer, M., & Zobel, A. (2008). Kompendium multimediales Lernen. Heidelberg: Springer.

Nitsch, R. (2015). Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Roth, J. (2015). Lernpfade: Definition, Gestaltungskriterien und Unterrichtseinsatz. In J. Roth, E. Süss-Stepancik & H. Wiesner (Hrsg.), Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Lernpfade als Weg zum Ziel (S. 3–25). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Vollrath, H.-J., Roth, J. (2012). Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe (2. Edition). Heidelberg: Springer Spektrum.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. Journal für Mathematikdidaktik, 10(1), 3–37.

Vollrath, H.-J. (2014). Funktionale Zusammenhänge. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), Fachdidaktik Mathematik (S. 112–125). Seelze: Friedrich.

Vom Hofe, R. (1996). Grundvorstellungen – Basis für inhaltliches Denken. mathematik lehren, 78, 4–8.

Vom Hofe, R., Blum, W. (2016)."Grundvorstellungen" as a category of subject-matter didactics. Journal für Mathematikdidaktik, 37(1), 225–254.

Wiesner, H., Wiesner-Steiner, A. (2015). Einschätzungen zu Lernpfaden – Eine empirische Exploration. In J. Roth, E. Süss-Stepancik & H. Wiesner (Eds.), Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Lernpfade als Weg zum Ziel (S. 27–45). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Zaslavsky, O. (1997). Conceptual Obstacles in the Learning of Quadratic Funtions. Focus on Learning Problems in Mathematics Winter Edition, 19(1), 20–44.

Fehlvorstellungen durch E-Feedback überwinden: Vorstellung eines Dissertationsprojekts

Felix Johlke

Nitsch (2015) hat gezeigt, dass typische Fehlermuster zu Darstellungswechseln funktionaler Zusammenhänge bei den Lernenden existieren und u.a. aufgrund von intuitiven Vorstellungen sehr stabil sein können. Im Projekt EoM (E-Feedback to overcome Misconceptions) soll mit Hilfe digitaler Werkzeuge ein computergestütztes individuelles Feedback gestaltet werden, sodass Conceptual-Change-Prozesse (Vosniadou, 2008) aktiviert und Lernende dabei unterstützt werden, diagnostizierte Fehlvorstellungen (Kallweit et al., 2017) zu überwinden. Eine Konzeptskizze mit Videoeinsatz wird vorgestellt.

Ziel des Projekts

Ziel meines Dissertationsprojektes ist es herauszufinden, wie computerbasiertes Feedback als automatisch generiertes Feedback mit Hilfe von digitalen Werkzeugen gestaltet werden kann oder muss, damit Lern- und Umdenkprozesse aktiviert und Lernschwierigkeiten überwunden werden können. Es existieren bereits einige computerbasierte Diagnose- und Testumgebungen sowie computerbasierte Tools, die es ermöglichen, spezifische Lernschwierigkeiten bei Schülerinnen und Schülern aufzudecken. Die zu entwickelnden Feedbackvarianten sollen derart auf die Lernenden abgestimmt sein, dass deren persönliche Lernstilpräferenzen berücksichtigt und damit Lernen unterstützt werden kann. Dabei werden unterschiedliche Theorien vom Umgang mit Fehlvorstellungen, wie zum Beispiel die Conceptual-Change-Theorie, berücksichtigt und in das Konzept eines förderwirksamen E-Feedbacks integriert.

Hintergrund und Anknüpfungspunkte

Feedback bildet das Verbindungsglied zwischen Diagnose von Fehlern und Fehlvorstellungen bei Schülerinnen und Schülern hin zu Fördermaterialien, mit deren Hilfe Lernschwierigkeiten überwunden werden sollen. An der TU-Darmstadt kann hier auf bereits existierende online-Diagnoseinstrumente zurückgegriffen werden.

Projekt CODI (Conceptual Difficulties of Functional Relationships)

Aus diesem Projekt können zentrale Erkenntnisse zur Fehleraufklärung als notwendige Bedingung für das geplante Feedback gezogen werden. Es handelt sich um ein von Nitsch (2015) entwickeltes Online-Diagnose-instrument, das in der Lage ist, Fehlermuster bei Schülerinnen und Schülern im Bereich der linearen und quadratischen Funktionen aufzudecken. Als Fehlermuster, oder auch systematische Fehler, wurden dabei Fehler aufgefasst, die sich als relativ stabil erwiesen haben und wiederkehrend bei verschiedenen Aufgaben desselben Typs aufgetreten sind. In einem solchen Fall kann eine dahinterliegende Fehlvorstellung vermutet werden. Es zeigten sich unter anderem Schwierigkeiten beim situativ-graphischen Darstellungswechsel (vgl. Abb. 1).

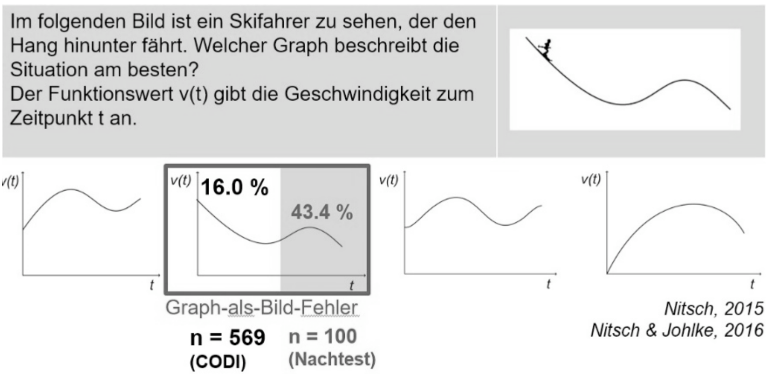


Abb. 1: Aufgabenbeispiel zum Graph-als-Bild-Fehler aus CODI

Der Graph-als-Bild-Fehler (GAP) konnte bei 16% aller Schülerinnen und Schüler im Haupttest nachgewiesen werden. Von diesen zeigten das Fehlermuster 43,3% auch noch ein halbes Jahr später in deinem Nachtest (Nitsch & Johlke, 2016). Dies lässt den Rückschluss auf eine besondere Form des Fehlermusters zu, das auf einer inadäquaten intuitiven Vorstellung beruht. Nitsch (2015, 12f. & 197) hat angedeutet, dass es gerade die Alltagsvorstellungen sind, die zu diesen besonders stabilen Fehlermustern führen können und konnte 8 weitere Fehlermuster identifizieren, die bei >10% der Lernenden aufgetreten sind.

An dieser Stelle setzt die Conceptual-Change-Theorie an mit dem Beschreiben von Möglichkeiten, wie der Prozess, ein vorhandenes stabiles Denkmuster zu verändern, aktiviert werden könnte. Dazu zählen beispielsweise Vorgehensweisen auf dem Level von Musterorientierung oder das Erzeugen eines Widerspruchs bei den Lernenden, der die Plausibilität des vorhandenen Konzepts in Frage zu stellen. Diese Vorgehensweise basiert auf einer konstruktivistischen Vorstellung von Lernen.

VEMINT

Das Projekt VEMINT (Virtuelles Eingangstutorium Mathematik Informatik Naturwissenschaft Technik) verwendet innerhalb eines Brückenkurses am Übergang von der Schule zur Hochschule die moodle-Plugins STACK, moodlePeers und ein selbstentwickeltes Plugin zum Zusammenstellen von sogenannten Schleifen-Aufgaben (vgl. auch Projekt DDTA – Digitale Diagnostische TestAufgabe – von Kallweit et al., 2017).

Dabei ermöglicht STACK offene Frageitems anstatt von Multiple-Choice-Antwortformaten einzusetzen und die Eingaben der Probanden automatisch auszuwerten. Die eingegebenen symbolisch-algebraischen Antworten können beispielsweise auf algebraische Äquivalenz zur richtigen Lösung überprüft werden. Dadurch wird neben dem Identifizieren auch das Realisieren als Grundhandlungen beim Erlernen neuer Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren ermöglicht und kann abgeprüft werden (vgl. zu den Grundhandlungen: Nitsch, Bruder und Kelava (2016)).

Die Verwendung von elementarisierenden Schleifen (vgl. Feldt-Caesar, 2017) ermöglicht eine differenzierte Fehleranalyse. Schülerinnen und Schüler bearbeiten zunächst die sogenannten Hauptlinienaufgaben und werden erst bei einem Fehler in eine Schleife geleitet. In dieser ermöglicht der Einsatz von Items, die elementare mathematische Handlungen der Hauptlinienaufgabe abprüfen, potentielle Fehlvorstellungen bei den Lernenden spezifischer und ökonomischer aufzufinden (vgl. Abb. 2). moodlePeers hingegen ist ein Plugin zur Erhebung von psychologischen Merkmalsausprägungen wie Lernzielen, Persönlichkeitsmerkmalen, Motivation, Lernstilen und Gruppenverhaltensaspekten. In VEMINT wird es dafür eingesetzt, Erstsemesterstudierende vor Beginn des Vorkurses in effektivere Arbeitsgruppen einzuteilen, als es über eine zufällige Einteilung der Fall wäre. Dadurch können in den Arbeitsergebnissen der Studierenden bessere Ergebnisse erzielt werden (Schaub & Roder, 2017) Diese Selbstauskünfte und Persönlichkeitsprofile der Studierenden können dazu verwendet werden, Feedbackelemente zu individualisieren und entsprechende Lernpräferenzen zu berücksichtigen.

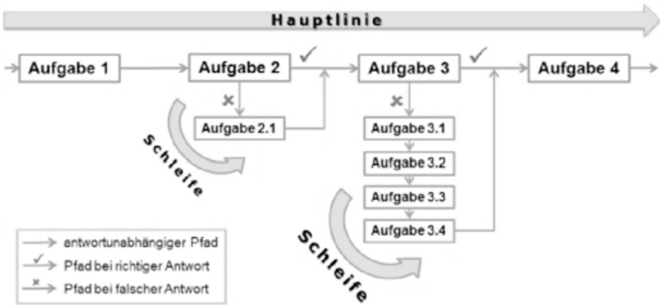


Abb. 2: Graphische Darstellung von Schleifen-Aufgaben (Feldt-Caesar, 2017, S.156)

BASICS Mathematik

Hier handelt es sich um ein unabhängiges Online-Tool, das von Lehrkräften eigenständig eingesetzt werden kann und das Fehler und Fehlermuster in den grundlegenden Themenbereichen des Übergangs von der Sekundarstufe I zur Sekundarstufe II diagnostiziert. Nach der Diagnose von spezifischen Lernschwierigkeiten werden eigens für diesen Test und die darin behandelten Themenbereiche entwickelte Fördermaterialen zum selbständigen Weiterlernen für die Lernenden angeboten. Diese erhalten außerdem eine automatisierte individuelle Übersicht, Auswertung und fehlerindividuelles Feedback, um daraus abgeleitet die notwendigen Materialien bereit zu stellen (Roder, 2016; vgl. Roder, 2017).

Die dargestellten Projekte CODI, VEMINT & BASICS haben verdeutlicht, dass ein Individualisieren auf technischer und fehleranalytischer Ebene möglich ist. Studien (vgl. Hattie & Timperley, 2007) haben gezeigt, dass ein Individualisieren des Feedbacks lernförderlich sein kann. Daher soll das Individualisieren unter dem Begriff des „E-Feedbacks" noch um eine weitere Ebene erweitert werden.

Individualisiertes E-Feedback

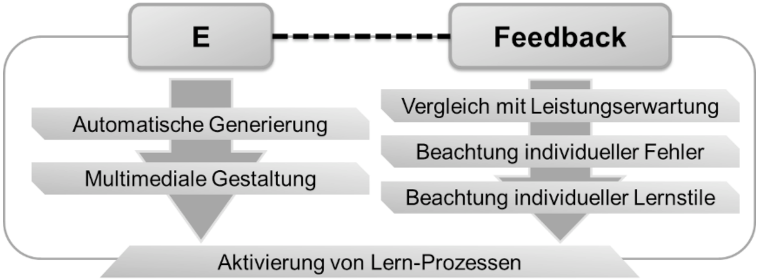


Abb. 3: Projekt EoM - Übersicht

Individualisiertes und elaboriertes Feedback kann die Lernenden dabei unterstützen, eigene Denkmuster oder Verhaltensweisen im Sinne einer Verbesserung des eigenen Lernprozesses zu verändern (vgl. Shute, 2008). Dass in jedem Feedback mehr enthalten sein sollte, als nur der Hinweis darauf, ob eine Aufgabe richtig oder falsch gelöst wurde, haben Hattie und Timperley (2007) bereits beschrieben.

Die in Projekt EoM generierten E-Feedback-Elemente sollen die Schnittstelle zwischen diagnostizierten Lernschwierigkeiten und Fehlvorstellungen bei den Schülerinnen und Schülern und dafür bereitgestellten Nachlernmaterialien schließen, um die Diskrepanz zwischen dem aktuellen Stand bzw. der aktuellen Leistung und dem angestrebten Ziel zu reduzieren (vgl. Hattie & Timperley, 2007).

Eine Individualisierung der Feedback-Elemente lässt sich auf mehreren Ebenen erreichen. Zum einen auf der Ebene der gezeigten Fehler und den dahinterliegenden Fehlvorstellungen. Wie im Rahmen der vorhandenen Projekte bereits teilweise geschehen, können Feedbackelemente spezifisch für bestimmte Fehler programmiert und vorbereitet werden. Die Vermutung liegt nahe, dass spezifische Fehlererklärungen individuell für einen Lernenden zusammengestellt zu einem größeren Lernzuwachs führen können als allgemeingültige Aufgabenerklärungen, die jedem Lernenden präsentiert werden.

Zum anderen sollte Feedback auch die Lernpräferenzen der Schülerin/des Schülers berücksichtigen. In der Literatur existieren unterschiedliche

Modelle und Beschreibungen von Lernstilen (Ehlers, 2011; Felder & Silverman, 1988; Lehmann, 2010) und auch die empirische Befundlage ist noch recht heterogen oder gar widersprüchlich. Lernstile gelten als Summe aller vorangegangener Einflüsse, die auf das Individuum bis dato eingewirkt haben und bieten den Vorteil, viele Verhaltensunterschiede erklären zu können, auch wenn eine Klassifikation an sich der „Einzigartigkeit" von Persönlichkeiten zunächst wiederspricht. Dennoch ist es offensichtlich und aus praktischen Erfahrungen bekannt, dass es Phänomene von individueller Feedbackrezeption gibt – und eben auch von (Nicht-)Erwartungen an Feedback. An dieser Stelle wird es im Projekt EoM darauf ankommen, geeignete Modelle von Verhaltensunterschieden zugrunde zu legen. Ein mögliches Modell wäre beispielsweise das der Lernstile von Gregory (2005). Zu diesem Modell scheint es auch einige Verbindungen zu den aus der Psychologie bekannten Big-Five (Bipp, 2006) Persönlichkeits-eigenschaften zu geben, die man hier wiederfinden kann.

Gregory unterscheidet 4 Lernstile, „Beach Ball", „Puppy", „Microscope" und „Clipboard". In diesem Artikel sollen beispielhaft nur zwei dieser Lernstile näher erläutert werden (vgl. Bruder, 2013).

Der/Die Microscope ist eine eher logisch und mathematisch denkende Persönlichkeit, die sehr viel Wert auf richtige, professionelle Informationen legt und meist allein und leistungsorientiert arbeitet. Im Gegensatz dazu kann der „Puppy"-Stil genannt werden mit einer eher kommunikativ angelegten Persönlichkeit, der sehr viel Wert darauflegt, persönliche Beziehungen zum Lerngegenstand aufbauen zu können. Auch hier liegt eine Tendenz zur Erfolgsorientierung vor, allerdings mehr auf der Ebene, Anerkennung für ein erbrachtes Ergebnis zu erlangen.

Aus solchen Persönlichkeitsbeschreibungen lassen sich spezifische Eigenschaften von Feedback ableiten. Dass diese Zuordnungen nicht immer eindeutig und zweifelsfrei getroffen werden können, hat auch Shute (2008) in ihrer Arbeit gezeigt. Dennoch kann beispielsweise ein Plugin, wie moodlePeers dafür eingesetzt werden, eine Einschätzung des Lernverhaltens vorzunehmen.

Umsetzungsbeispiel

Zum Aktivieren von Conceptual-Change-Prozessen bei einem diagnostizierten Graph-als-Bild-Fehler kann für einen Lerntyp mit stabiler Selbstwirksamkeit die Variante der Dissonanzerzeugung angewandt werden. Voraussetzung hierfür ist, dass dabei auch eine richtige, alternative Herangehensweise motiviert wird, die von den Lernenden herangezogen werden kann (Posner, Strike, Hewson & Gertzog, 1982; Vosniadou, 2008).

Abb. 5: Videoausschnitt aus möglichem Video-Feedback (Neufeld, 2016)

Ein erster Versuch eines videobasierten Feedback in diesem Sinne wurde bereits im Rahmen einer wissenschaftlichen Arbeit/Examensarbeit (Neufeld, 2016) umgesetzt (vgl. Abb. 5). Es handelt sich dabei um ein Erklärvideo zum Thema „Funktionale Zusammenhänge verstehen und graphisch darstellen". Ziel des Videos ist, dass Lernende mit Hilfe einer auf das diagnostizierte Fehlermuster bezogenen Feedbackvariante den Graph-als-Bild-Fehler überwinden können.

Bei dieser Aufgabe geht es wie in der Skifahreraufgabe darum, zu einer gegebenen Bewegung (hier ein Auto auf einer Landstraße), den Geschwindigkeits-Zeit-Graphen zu skizieren. Dieses Video könnte als Feedback-Variante beim Auftreten des Graph-als-Bild-Fehlers erscheinen und soll im Sinne der Conceptual-Change-Theorie einen Lernprozess aktivieren. Nach der „Kognitiven Theorie des multimedialen Lernens" von

Richard E. Mayer und seinen Mitarbeitern an der Santa-Barbara-Universität von Kalifornien kann der Einsatz von multimedialen Möglichkeiten eher zu tiefergehendem Lernen führen als single-media-Präsentationen.

An ein solches Video könnten sich bereits erwähnte Fördermaterialien (Projekt BASICS, Roder (2017)) anschließen, so dass ein eigenständiges Weiterlernen möglich ist. Die Feedback-Elemente verstehen sich als aktivierende Elemente, welche die genannten Prozesse initiieren sollen.

Ausblick

Als nächstes Ziel sind im Projekt EoM Befragungen von Studierenden des VEMINT-Vorkurses vorgesehen. Ziel ist es dabei, zunächst weitere Informationen direkt von den Studierenden einzuholen, welcher Lerntyp welche mediale Feedback-Umsetzung bevorzugt. Eingesetzt werden dabei sowohl ein interaktives Plugin als auch ein Erklärvideo. Die Interviewten sollen sich zunächst selbst einschätzen und ihr eigenes Vorgehen beim Lernen beschreiben. Anschließend werden die beiden Feedback-Varianten miteinander vergleichen. Im Vordergrund steht dabei die Frage, ob sie von einer der beiden exemplarisch ausgewählten Varianten angesprochen werden.

Im Rahmen einer größer angelegten Studie sollen (Langzeit-)Effekte des E-Feedbacks durch mehrmaliges Testen überprüft werden. Folgende noch ausstehende Problemstellen sollen im Projekt EoM behandelt werden:

(Wie) Wird es möglich sein, Conceptual-Change-Prozesse durch die Verwendung von digitalen Tools zu aktivieren?

(Wie) Wird es möglich sein, Conceptual-Change-Prozesse, oder andere Effekte zu erfassen?

Gibt es (messbare) Unterschiede, welchen Effekt unterschiedliche medialen Umsetzungen von Feedbackelementen auf die Lernstile haben?

Welche Potentiale und Möglichkeiten, aber auch welche Grenzen bietet eine computerbasierte Gestaltung von Feedback?

Literatur

Bipp, T. (2006, 29. November). *Persönlichkeit - Ziele - Leistung. Der Einfluss der Big Five Persönlichkeitseigenschaften auf das zielbezogene Leistungshandeln*. Dissertation, Dortmund. Universität Dortmund. Zugriff am 07.06.2017. Verfügbar unter https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/23252/8/BippDissertation2.pdf

Bruder, R. (2013). Jeder lernt anders. Lernen in heterogenen Lerngruppen. *Mathematik 5-10* (23), 42–45.

Ehlers, U.-D. (2011). *Qualität im E-Learning aus Lernersicht* (Medienbildung und Gesellschaft, Bd. 15, 2., überarbeitete und aktualisierte Auflage). Wiesbaden: VS Verl. für Sozialwiss.

Felder, R. M. & Silverman, L. K. (1988). Learning and Teachings Styles in engineering education. *Engineering Education, 78* (7), 674–681. Zugriff am 21.08.2017. Verfügbar unter http://www4.ncsu.edu/unity/lockers/users/f/felder/public/Papers/LS-1988.pdf

Feldt-Caesar, N. (2017). *Konzeptualisierung und Diagnose von mathematischem Grundwissen und Grundkönnen. Eine theoretische Betrachtung und exemplarische Konkretisierung am Ende der Sekundarstufe II* (Perspektiven der Mathematikdidaktik, 1. Auflage 2017). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.

Gregory, G. (2005). *Differentiating instruction with style. Aligning teacher and learner intelligences for maximum achievement*. Thousand Oaks, Calif.: Corwin Press.

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research, 77* (1), 81–112.

Kallweit, M., Schaub, M., Feld-Caesar, N., Bruder, R., Krusekamp, S., Neugebauer, C. et al. (2017). Digitale Diagnostische Testaufgaben - Theoretisches Design und interaktives Beispiel. In Institut für Mathematik der Universität Potsdam (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (Beiträge zum Mathematikunterricht). Münster: WTM-Verlag.

Lehmann, R. (2010). *Lernstile als Grundlage adaptiver Lernsysteme in der Softwareschulung* (Medien in der Wissenschaft, Bd. 54). Zugl.: München, Univ., Diss., 2009. Münster: Waxmann.

Neufeld, A. (2016). *Medienbasierte Aufklärung von Fehlermustern beim Umgang mit Darstellungen funktionaler Zusammenhänge*. Wissenschaftliche Hausarbeit zum 1. Staatsexamen, Technische Universität Darmstadt. Darmstadt.

Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Nitsch, R., Bruder, R. & Kelava, A. (2016). Schülerhandlungen als Elemente fachdidaktisch motivierter Kompetenzmodellierungen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37* (2), 289–317.

Nitsch, R. & Johlke, F. (2016). Stabilität von Fehlermustern bei funktionalen Zusammenhängen. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016. Vorträge auf der 50. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 07.03.2016 bis 11.03.2016 in Heidelberg* (Beiträge zum Mathematikunterricht). Münster: WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W. & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception. Toward a theory of conceptual change. *Science Education, 66* (2), 211–227.

Roder, U. (2016). Entwicklung eines Förderkonzepts zu Grundwissen und Grundkönnen am Übergang in die Sekundarstufe II. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016. Vorträge auf der 50. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 07.03.2016 bis 11.03.2016 in Heidelberg* (Beiträge zum Mathematikunterricht, Bd. 2, S. 791–794). Münster: WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Roder, U. (2017). *Basics-Mathematik. Diagnose und Förderung von Grundwissen,* Technische Universität Darmstadt. Zugriff am 08.12.2017. Verfügbar unter http://basics-mathematik.de/

Schaub, M. & Roder, U. (2017). Arbeit mit optimierten Lerngruppen im Online-Vorkurs VEMINT. In Institut für Mathematik der Universität Potsdam (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (Beiträge zum Mathematikunterricht). Münster: WTM-Verlag.

Shute, V. J. (2008). Focus on Formative Feedback. *Review of Educational Research, 78* (1), 153–189.

Vosniadou, S. (Ed.). (2008). *International handbook of research on conceptual change* (Educational psychology handbook series). New York: Routledge.

Modellieren in Klausuren – Wie geht das?

Henning Körner

Einleitung

„Kommt das auch in der Klausur dran?“ Wenn diese, wenn auch motivational bedenkliche aber doch im realen Unterricht regelmäßig auftretende Schülerfrage kategorisch mit „Nein“ beantwortet wird, nutzt es wenig, wenn prozessorientierte Kompetenzen zwar verpflichtend und konstitutiv den Mathematikunterricht mitprägen sollen, also in Lernsituationen auftreten, aber in Leistungssituationen außen vor bleiben, weil die Vorstellung herrscht, dass solche Prozesse nicht in Klausuren abbildbar sind. Der Beitrag will diese Vorstellung mindestens exemplarisch widerlegen. Dazu wird als Kernstück eine Analyse von Schülerlösungen zu einer Klausuraufgabe mit hohen Modellierungsanteilen mit Darlegung der zugehörigen Bewertungskriterien vorgenommen. Digitale Werkzeuge sind dabei notwendige Voraussetzung für eine schülerorientierte, sachgerechte Bearbeitungsmöglichkeit in der Klausur und im vorausgegangenen Unterricht. Da zum Verständnis von Klausuren notwendig ein Bezug zum vorgängigen Unterricht ist, wird dieser grob skizziert.

Der Unterricht

Als Grundlage und Ausgangspunkt für das Beziehungsgefüge von Unterricht und schriftlichen Leistungsüberprüfungen (Klausuren) werden zwei Thesen gesetzt (vgl. Körner (2011), S.35f.):

These 1: In Prüfungen muss qualitativ und quantitativ das abgefragt werden, was auch den Unterricht qualitativ und quantitativ prägt.

These 2: (Guter) Unterricht ist immer mehr als in Prüfungen abgefragt werden kann.

Aus These 1 folgt, dass Modellieren auch in Klausuren stattfinden muss, wenn es im Unterricht stattfindet, aus These 2 folgt, dass nicht alle Aspekte des Modellierens mit womöglich mehrmaligem Durchlaufen des Modellierungszyklus in Klausuren abbildbar sein müssen bzw. können.

Der Unterrichtszusammenhang: Leitfaden im vorgängigen Unterricht war die Modellierung vorgefundener Formen durch mathematische Funktionen. Schon die Einführung eines neuen Inhalts („Kurvenanpassung“) erfolgte also in modellierender Absicht, es wurden nicht in klassischer Weise erst die innermathematischen Werkzeuge erstellt („Steckbriefaufgaben“) ehe es zu Anwendungen kam. Nachdem zunächst Interpolationspolynome im Blick waren und dabei auch der ‚Rungeeffekt‘(„Ausschlagen“ der Kurven) entdeckt wurde, war klar, dass Interpolationspolynome meist keine adäquaten Modelle liefern. Eine Ideensammlung im Plenumsgespräch lieferte Ideen von zwei Schülern:

(1) Laurin: Besondere Punkte auslesen (Extrempunkte, Wendepunkte)

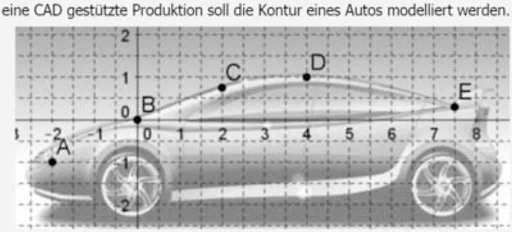
(2) Magali: Form aus Stücken einfacher Funktionen zusammensetzen.

So war der Boden für eine größer angelegte Gruppenarbeit zum Modellieren bereitet. Es sollte die Form einer Vase modelliert werden (in Anlehnung an Körner u.a. (2012), S.65ff.). Eingefordert wurden ausführliche Verschriftlichungen des Arbeitsprozesses und der Ergebnisse und partielle Präsentationen. Hier wurden entsprechend intensive Erfahrungen im Modellieren gesammelt. Alle Gruppen durchliefen mehrfach den Modellierungszyklus. Anschließend wurden Teilaspekte sichernd und vertiefend geübt.

Die Klausuraufgabe

6	*Karosseriedesign*

Für eine CAD gestützte Produktion soll die Kontur eines Autos modelliert werden.



Es werden folgende Punkte ausgelesen: A(-2|-1), B(0|0), C(2|0,75), D(4|1), E(7,5|0,3)
In B ist ein kleiner Knick vorhanden.

Erzeugen Sie ein passendes Modell. Überprüfen Sie es mit ausgewählten Punkten und geben Sie – gegebenenfalls – an, welche Probleme Sie bei der Modellierung haben.

Die Aufgabe ist Teil einer Klausur mit einem hilfsmittelfreien Teil (30min) und einem Teil mit CAS-Benutzung (60min). Als zeitlicher Rahmen für die Bearbeitung dieser Aufgabe sind ca. 30min angesetzt.

Das Koordinatensystem und ausgewählte Punkte sind vorgegeben, die Modellierung eines Knicks ist neu. Unmittelbar einleuchtend ist, dass es nicht eine einzige korrekte Lösung gibt, sondern, dass unterschiedliche Lösungsfunktionen in ähnlicher Weise adäquat sein können. Für eine Bewertung wurden Lösungen in unterschiedlicher Qualität antizipiert und eine grobe Diskretisierung der insgesamt möglichen 20 Rohpunkte vorgenommen:

- Modellierung mit einer Funktion ohne Berücksichtigung des Knicks war noch nicht ausreichend.
- Die Erfassung des Knicks als Problem und partielle Lösungen stellten ausreichende bis befriedigende Lösungen dar.
- Vollständige Lösungen und Validierungen waren gute bis sehr gute Leistungen.

Bei der Bewertung ist zu beachten, dass die Aspekte des Modellierens jenseits der rechnerischen Bestimmungen (Modellfindung, Modellvalidierung, mehrfache Durchläufe des Zyklus) ein wesentliches Kriterium darstellen. Eine reflektierte , iterierte Bearbeitung hatte einen höheren Wert als die korrekte Berechnung eines Modells unter Nichtbeachtung der spezifischen Sachsituation (Knick, Passung zur Karosserieform).

Durchgehend floss natürlich die Konsistenz, Nachvollziehbarkeit und Strukturiertheit der Darstellungen mit in die Bewertung ein.

In den übrigen Aufgaben der Klausur treten keine Aspekte des Modellierens auf, hier prägen Verstehen innermathematischer Zusammenhänge und Anwenden bekannter Verfahren die Aufgaben, so dass insgesamt der vorhergehende Unterricht in adäquater Weise auch in der Klausur abgebildet ist.

Die Lösungen der Schülerinnen und Schüler

Aus Umfangsgründen können nur einige Lösungen exemplarisch hier dargestellt und analysiert werden. Es wird versucht das qualitative und quantitative Spektrum der Lösungen adäquat abzubilden. In der Anlage sind die Originalauszüge.

(1) Ohne Berücksichtigung des Knicks wird ein Interpolationspolynom ermittelt. Dabei unterläuft ein Fehler, so dass nach reduzierter Matrix eigentlich keine Lösung existiert. Dies wird falsch interpretiert (Lösung wird „hingebogen"), es wird erfasst, dass diese nicht passt und auf Regression zurückgegriffen (neuer Ansatz). Es wird nicht berücksichtigt, dass das Polynom in diesem Fall das Interpolationspolynom ist, der Rundungsfehler im CAS ($2{,}4 \cdot 10^{-13}$) wird nicht erkannt.

Das Modell wird grob validiert. In dieser Bearbeitung werden zwar Modellierungszyklen im Groben durchlaufen, Ansatz-, Interpretations- und Reflexionsfehler führen aber zu nur mangelhafter Bewertung.

(2) Ohne Berücksichtigung des Knicks wird das Interpolationspolynom korrekt bestimmt und innermathematisch orientiert dargestellt (Bruchdarstellung) und überprüft (Punktinzidenz). Bei der erfolgten grafischen Überprüfung wird Punktinzidenz redundant notiert, ob der Kurvenverlauf zur Karosserieform passt bleibt ziemlich offen. Als Modellierungsproblem werden nur generelle Argumente keine sachbezogenen erwähnt.

Ähnliches liegt in einer anderen Bearbeitung vor, wo als Modellierungsproblem allein dezimal dargestellte Koeffizienten des korrekt ermittelten Interpolationspolynoms mit daraus resultierenden Rundungsfehlern bei der Kontrolle richtig benannt werden, dass grundlegende Modellierungsproblem aber außen vor bleibt.

Auch diese Bearbeitungen sind noch nicht glatt ausreichend, weil sie zwar innermathematisch weitestgehend korrekt sind, aber nur grob und lückenhaft Modellierungskompetenz zeigen.

(3) Die Bearbeitung zeigt einerseits grundlegenden Überblick und adäquate Ansätze, leidet aber unter Kargheit bezüglich der Dokumentation von

Lösungswegen, es werden nur Ergebnisse genannt, deren Erzeugung aus den Darstellungen nicht rekonstruierbar ist. So bleibt unklar, wieso von mehreren Wendepunkten gesprochen wird und warum das Gauß-Verfahren nicht zum Ziel führen soll. Der im anfänglichen Ansatz sinnvoll mathematisierte Knick wird nicht mehr im weiteren Verlauf konkretisiert. Hinter diesen Ausführungen schimmert zwar tieferes Verständnis von Modellierungsprozessen und damit einhergehenden Mathematisierungsmöglichkeiten durch, die konkrete Umsetzung bleibt aber so lückenhaft und nicht rekonstruierbar, dass insgesamt nur eine mehr mangelhafte als ausreichende Bewertung vorgenommen werden kann.

(4) Die durch den Knick induzierte Notwendigkeit einer stückweisen Modellierung wird erfasst und es werden auch Kriterien für den Übergang genannt. Allerdings werden diese nur in Teilen innermathematisch korrekt umgesetzt. Die vorliegende Argumentation für den Ansatz der Anschlussfunktion im Punkt B legt einen klassischen Modellierungsfehler nahe: Die Realität wird an das Modell angepasst („Deshalb beachte ich den Knick nicht, um ein genaueres Modell zu erhalten.“) Diese Bearbeitung liegt wegen des letztendlich passenden Modells im befriedigenden Bereich, bezüglich der Modellierungskompetenz eher im ausreichenden Bereich.

(5) Der Knick als besonderer Punkt wird erkannt, aber begrifflich falsch interpretiert. Der Ansatz mit einem Polynom vom Grad 3 ist zwar angemessen, führt aber bei der Umsetzung zu einem – aus dem Unterricht unbekannten – Gleichungssystem, das keine Lösung hat, weil die Bedingungen die notwendige Symmetrie solcher Polynome zum Wendepunkt nicht erfüllen. Auch dieser Inhalt war im Unterricht nicht behandelt. Dieses erfasste offene Problem führt zu einem Neuansatz. Es werden nun nur noch jeweils zwei Punkte durch eine Funktion vebunden. Allerdings wird auch hier wieder der Knick nicht in adäquater Weise berücksichtigt, es wird knickfrei in B verbunden. Sinnvollen weiteren Ansätzen und rechnerischen Umsetzungen stehen manchmal nicht passende Folgerungen durch fehlenden Abgleich mit der Abbildung (Sachsituation) gegenüber (z. B. $f_{CD}'(2)=0$, $f_{CD}'(4)=0$). Ein Fazit fasst auf der Metaebene noch einmal sinnvoll zusammen und benennt charakteristische Pro-

bleme beim Modellieren, insistiert aber weiterhin auf einem Wendepunkt in B.

Die Ausführungen zeigen, dass es auch in Klausuren möglich ist, mehrfach Lösungswege zu gehen, dass ‚Entdecken' unbekannter Situationen nicht Abbruch und Sackgasse bedeuten müssen und dass Reflexion des eigenen Tuns auftreten kann. Obwohl kaum im klassischen Sinne vollständige Lösungen gelingen, sind die Ausführungen von einem hohen Maß an Bewusstheit, auch über Aspekte des Modellierens, geprägt, so dass insgesamt gute Leistungen vorliegen.

(6) Diese Bearbeitung beeindruckt durch die bewusste und reflektierte Modellierung des Knicks. Das Problem wird inhaltlich klar formuliert und adäquat in eine mathematische Behandlung überführt. Obwohl im ersten Modell innermathematisch betrachtet ein Knick vorliegt, wird dieser kontextbezogen korrigiert („Steigung nahezu gleich.") und im zweiten Modellierungsgang als zusätzliche Bedingung vorgängig in das Modell mit aufgenommen. Während bezüglich des Knicks eine sehr hohe Qualität des Modellierens vorliegt, werden Validierungen der erhaltenen Modelle bezüglich der optischen Passung nicht vorgenommen. So wird zwischen A und B eine Gerade bestimmt, was zwar innermathematisch angemessen ist, weil zwei Bedingungen gegeben sind, in der Sachsituation aber weniger, weil die Passung zur Karosserieform nur sehr mäßig ist. Auch diese Bearbeitung liegt im guten Bereich.

(7) In reduzierter, aber immer nachvollziehbarer Darstellung werden mehrere Mathematisierungen durchgeführt und nacheinander die Schwächen der Modelle beseitigt (Passung zur Form, Knick). Allerdings bleibt die Behandlung des Knicks wenig zielgerichtet. Die Erkenntnis, dass zwei Funktionen stückweise verbunden werden müssen, tritt hervor, allerdings führt der erste Ansatz zur Umsetzung gerade zu „Knickfreiheit". Zum Schluss wird einfach die Steigung der Geraden durch A und B ein wenig verändert, so dass ein (sehr kleiner) Knick und Passung erzeugt werden. Die Bearbeitung liegt auch im Bereich des Gut.

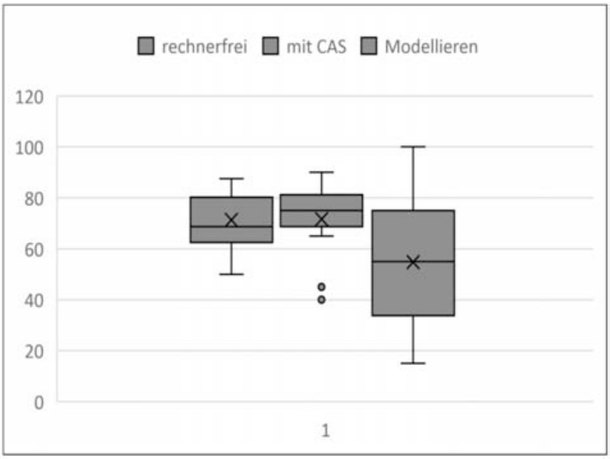
(8) Dieses Beispiel zeigt eine ausführliche, reflektierte Validierung der vorgenommenen Modellierungen. Interessant ist, dass neben der Passung der Funktionen zu der vorgegebenen Form das Krümmungsverhalten be-

trachtet wird, das in diesem Sachkontext allerdings keine prägende Rolle spielt. Die Ausführungen sind innermathematisch gediegen und zeugen von vertieftem Verstehen des Sachverhalts, die notwendig zu begründende Relevanz dieser Betrachtungen für das Modellierungsproblem wird aber nicht in den Blick genommen. Auch diese Bearbeitung liegt im Bereich des Gut, unterscheidet sich aber bezüglich der Modellierungskompetenzen von (7).

(9) Einer Schülerin gelingen Modellierungen mit sehr hoher Zielbewusstheit auf der Grundlage adäquater Planungen mit sehr hoher Reflexivität des eigenen Tuns. Die Ausführungen im Anhang können nur einen kleinen Einblick geben. Sie erreicht die volle Punktzahl.

Kleine empirische Auswertung:

Die Klausur setzt sich aus einem rechnerfreien Teil, einem Teil mit CAS-Nutzung und der Modellierungsaufgabe zu gleichen Anteilen zusammen.



y-Achse: %

Die Ergebnisse der Modellierungsaufgabe sind im Durchschnitt ca. 1,3 Bewertungspunkte auf der Skala von 0 bis 15 schwächer als in den beiden anderen Teilen. Dies ist aber angemessen, weil schon in der Anlage der Klausur diese Aufgabe ihren Schwerpunkt in den Anforderungsbereichen II und III hat und das höhere Anspruchsniveau durch höhere Anteile an

Anforderungsbereich I in den anderen Teilen kompensiert wird. Interessant ist, dass die Streuung bei der Modellierungsaufgabe signifikant größer ist als in den anderen Teilen. Eine stabile Interpretation oder Erklärung lässt die kleine Stichprobe nicht zu. Naheliegend ist, dass die offene Aufgabenstellung für im Modellieren schwächere Schülerinnen und Schüler wenig sicheren Raum für Standardlösungen lässt, während Leistungsstarke ihr Potential mehr entfalten können.

Fazit:

Die realen Bearbeitungen einer Modellierungsaufgabe in einer Klausur zeigen, dass Grundprinzipien und vielfältige Aspekte des Modellierens auch in einer Leistungsüberprüfung abfragbar und bewertbar sind. Es ist selbstverständlich, dass dazu natürlich im vorgängigen Unterricht entsprechende Erfahrungen in Lernsituationen gemacht werden müssen. Eine grobe Kategorisierung und Beispiele solcher Erfahrungen findet man in Körner (2013).

Der Unterschied zu einer Behandlung in einer Lernsituation liegt im wesentlichen in einer Vorentlastung mit leichter Normierung möglicher Lösungen durch Vorgabe des Koordinatensystems und ausgewählter Messpunkte. In einer Lernsituation wird man nur die Karosserieform vorlegen und alles weitere den Schülerinnen und Schülern überlassen. In der Phase der Validierung wird man den Austausch und die Diskussion in der Gesamtgruppe initiieren, um die wertende Betrachtung von Modellen zu fördern. Dies geschah in der vorgängigen Unterrichtseinheit durch Modellierung einer Vasenform. Eine ausführliche Dokumentation einer solchen Modellierung mit Muße in einer Lernsituation ist in Körner (2007) beschrieben.

Die Bewertung mit Rohpunkten ist ein wohl nirgends in Frage gestelltes Prinzip in mathematischen Klausuren und wurde auch hier beibehalten. Einerseits zeigt sich, dass es möglich ist, auch prozessbezogene Kompetenzen und damit zusammenhängende Bearbeitungs- und Argumentationsweisen mit Punkten leistungsdifferenziert zu bewerten, anderseits ist es noch wichtiger als in klassischen, mehr an Kalkülen orientierten Klausuren, die Gesamtanlage der Bearbeitung in den Blick zunehmen, wenn es um innere Konsistenz und reflexive Tiefe der Ausführungen geht.

Es ist klar, dass viele hermeneutische Kriterien bei der Bewertung solche Aufgaben mit einfließen, was natürlich offensichtlich ist, sind ja Textproduktionen im Zusammenhang mit Beschreibung, Interpretation und Reflexion der Modellierungsprozesse konstitutiv für die Bearbeitung. Es wird einerseits deutlich, dass solche Aufgaben nicht in gleicher Weise wie Kalkül-Aufgaben mit halbwegs durchoperationalisierten Diskretisierungen in der Punktvergabe bewertet werden können, anderseits aber natürlich auch transparent und valide bezüglich der gesetzten Kriterien benotet werden können. Mathematiklehrkräfte müssen eben auch Texte jenseits von Lösungswegbeschreibungen korrigieren können. Dies ist immer dann zwingend notwendig, wenn prozessorientierte Kompetenzen eingefordert werden. Hier ist bei der Bewertung also auf ein hohes Maß an subjektiver Transparenz zu achten, die auch in Zeiten eines dominanten Objektivierungsdenkens mithilfe kleinschrittiger Operationalisierungen immer noch als wesentliches pädagogisches Grundprinzip prägend bleiben sollte.

Literatur

Körner, H. (2007): Die Vase, in: Greefrath/Maaß: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 11, Hildesheim 2007, S.123 – 138.

Körner, H. (2011): Prüfungen im Zeitalter von CAS und GTR: Was und wie? in: Kortenkamp/Lambert/Zeimetz (Hrsg.) Computerwerkzeuge und Prüfungen, Hildesheim 2011, S.35-56.

Körner/Lergenmüller/Schmidt/Zacharias (Hrsg.) (2012): Mathematik Neue Wege Niedersachsen 11/12, Braunschweig 2012.

Körner, H. (2014) : Modellieren : Szenen aus dem Unterricht, in : Henn/Meyer : Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 1, Wiesbaden 2014, S.14 – 26.

Anlagen

(1)

$f(-2)=1$

$f(0)=0$

$f(2)=0{,}75$

$f(4)=1$

$f(7{,}5)=0{,}3$

Polynom Grad 4

<u>im TC mit rref:</u>

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0{,}\overline{16} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}225 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}833 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (v)$$

Mit dem Polynom

$$y = 0{,}16x^4 - 0{,}225x^3 + 0{,}8833x^2 + 1x + 1$$

kam ich nicht zur Lösung.

Daher habe ich auf eine Regression zurückgegriffen.

$$\underline{y \approx 5{,}96x^4 - 0{,}0076x^3 - 0{,}236x^2 + 0{,}467x - 2{,}4\cdot 10^{-13}}$$

~~Den~~ Die Regressionsfunktion beschreibt die Form des Autos sehr gut. (v)

(2)

$f(x) = \frac{299}{501600}x^4 - \frac{2539}{334400}x^3 - \frac{16811}{501600}x^2 + \frac{19557}{41800}x$ (v)

Überprüfung mit TC:

* $f(-2) = -1$ STIMMT $f(2) = 0{,}75$ STIMMT $f(7{,}5) = 0{,}2$
$f(0) = 0$ STIMMT $f(4) = 1$ STIMMT STIMMT.

plotten der Punkt im TC + zeichnen der Funktion: ↯
Die Funktion f(x) trifft auf die Punkte A, B, C, D, E zu.
Probleme bei der Modellierung:
– großer Aufwand (potenzielle Fehlerquelle: z.B. vertippen im TC) (v)

Die errechnete Funktion f(x) passt zwar gut zu der Kontur des Autos, allerdings nicht zu 100%. Das liegt daran, dass es enorm viele Nachkommastellen gibt, welche in der Funktion ab- bzw. aufgerundet wurden. Diese ~~abgerundeten~~ weggelassenen Zahlen ~~können~~ können viel in der Genauigkeit des Grafen ausmachen, daher sind Punkte beim überprüfen der Funktion nicht ganz genau.

(3)

b) Da es bei Punkt B einen Knick gibt, ist es sinnvoll, dass Modell durch mehrere Funktionen zu erzeugen. ✓

Teil 1 Motorhaube:

Die Motorhaube ist ähnlich gebogen wie eine Parabel, daher ist eine quadratische Funktion sinnvoll. ✓ Um eine passende Funktion zu finden, die durch A und B verläuft, reicht es, eine Normalparabel mit dem Faktor $-\frac{1}{4}$ zu modifizieren.

In meinem Modell wird der Interval $[x_A, x_B]$ durch $f(x) = -0{,}25x^2$ beschrieben. ✓

Teil 2 Dach:

Dieser Teil des Fahrzeugs ist schwierig zu modellieren, da eine reduzierte Matrix in Diagonalform der vorgegebenen Punkte (B,C,D,E) kein gewünschtes Ergebnis liefert.

Für die Aerodynamik des Fahrzeugs ist es wichtig, dass das Fahrzeug nicht unnötig hoch wird. Zudem sollte das Dach nicht an einigen Stellen zu tief werden.

Wenn man jedoch eine Funktion durch den Gauß-Algorithmus sucht, erhält man eine Funktion, die zwar die Punkte durchläuft, jedoch weißt die Funktion Wendepunkte auf, ~~wodurch~~ die nicht dem Dach des gewünschten Modells entsprechen. Ein Ansatz mit dem Gauß-Algorithmus ist also ungeeignet. · NEIN → #

(4)

1. Graph von Punkt B bis E (Intervall [0|7,5]):

[…]

~~Mit H~~ Mithilfe der Ableitung der Funktion f_{BCDE} an der Stelle 0, konnte ich die Steigung dort berechnen und kann jetzt den 2 Teil des Graphen

berechnen. Jedoch ist zu bedenken, dass das Modell dabei dann, wegen dem Knick bei B, ungenau wird. ~~ungenau wird, wegen dem Knick bei B~~. Das Problem ist, dass ich diesen Knick nicht berechnen kann, da ich für f_{AB} nicht die Steigung berechnen kann(w). Ich hätte nur 2 Bedingungen, die jeweiligen Punkte, und ~~der~~ nur aus den 2 Bedingungen bekäme ich eine lineare Funktion, die noch schlechter zum Modell* passt! Deshalb beachte ich den Knick nicht, um ein möglichst genaues Modell zu erlangen:

~~Ge~~ Gesamtes Modell:

$[-2|0] \rightarrow f_{AB}(x) = \frac{183}{4400}x^3 - \frac{917}{2200}x^2$

$[0|7{,}5] \rightarrow f_{BCDE}(x) = -\frac{133}{4400}x^3 + \frac{2531}{8800}x^2 - \frac{917}{2200}x$

(5)

A $(-2|-1)$; B $(0|0)$; C $(2|0{,}75)$; D $(4|1)$;
E $(7{,}5|0{,}3)$

1. f_{ABC} durch $A, B \wedge C$ mit Knick in B (B als Wendepunkt!)

DANN K
KNICK

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad f''(x) = 6ax + 2b$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\quad f''(x) =$

I. $f(-2) = a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d = -1$

$-8a + 4b - 2c + d = -1$ ✓

II. $f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$

$d = 0$ ✓

III. $f(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 0{,}75$

$8a + 4b + 2c + d = 0{,}75$ ✓

IV. $f''(0) = 6 \cdot a \cdot 0 + 2 \cdot b = 0$

$2b = 0$ ✓

↓ Matrix (kariert)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -8 & 4 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 0{,}75 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{rref}]{\text{TC}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow f_{ABC}(x) =$

Was ist dies für eine Funktion?

[…]

6. Neuer Ansatz

1.) f_{AB} ist quadratische Funktion

Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

[…]

2. f_{BC} ist eine lineare Funktion

Ansatz: $f(x) = ax + b$

$f'(x) = a$

~~$f'(0)$~~

I. $\underline{f_{BC}'(0) = f_{AB}'(0)}$ $\Rightarrow f_{AB}'(0) = 0$

3. f_{CD}

Ansatz: $f(x) = ax^2+bx+c$
$f'(x) = 2ax+b$

I. $f(2) = a\cdot 2^2+b\cdot 2+c = 0{,}75$
$4a+2b+c = 0{,}75$ ✓

II. $f(4) = a\cdot 4^2+b\cdot 4+c = 1$
$16a+4b+c = 1$ ✓

III. $f_{CD}'(2) = f_{BC}'(2)$?
$f_{CD}'(2) = \underline{\underline{0}}$
$f_{CD}'(2) = 2a\cdot 2+b = 0$
$4a+b = 0$

[…]

$f_{CD} = 0{,}0625x^2 - 0{,}25x + 1$ (✓)
$f_{CD}' = 0{,}125x - 0{,}25$

4. f_{DE}: quadr. Funktion
Ansatz: $f(x) = ax^2+bx+c$
$f'(x) = 2ax+b$

I. $f_{DE}'(4) = f_{CD}'(4) \rightarrow f_{CD}'(4) = 0{,}125\cdot 4 - 0$
$f'(4) = 2\cdot a\cdot 4+b = 0{,}25$ $\qquad = \underline{0{,}25}$
$8a+b = 0{,}25$ ✓

[…]

Das Problem war der Knick in z.B.
Was bedeutet dies für die Funktion?
Dass $f_{BC}(x) = 0$ ist kann eigentlich
nicht sein, ich habe aber mit dieser
Funktion weiter gerechnet. Zuerst habe ich
für die Funktion f_{ABC} eine Funktion
3. Grades genommen, konnte aber leider
die Funktion nicht ablesen. Dabei habe ich
mir gedacht, dass in B, ein Wendepunkt
vorliegen könnte DANN IST ES ABER AUCH KEIN KNICK!
Leider habe ich keine Zeit mehr, die
Probe durchzuführen, würde aber die
Funktionen f_{AB}, f_{BC}, f_{CD} und f_{DE} in den
Taschenrechner eingeben und überprüfen, ob
B und D auf dem Graphen liegen. (✓)

(6)

der beider Ich füge
2 Funktionen aneinander.
Die ~~Er~~ erste Funktion
wird ein Graph von A nach
B darstellen, die zweite
von B nach E. Da in
B ein kleiner Knick ist,
darf die Steigung der
beiden Graphen in diesem
Punkt NICHT gleich sein. ✓

[...]

Funktion zu $\overline{AB}$:
$f(x) = ax + b$
$A(-2|-1): f(-2) = a\cdot -2 + b = -1$
$B(0|0): f(0) = a\cdot 0 + b = 0$
$a = \frac{1}{2}$ Einsetzen: $f(x) = \frac{1}{2}x$ ✓
$b = 0$

[…]

Einsetzen:
$f(x) = 0{,}000455x^3 - 0{,}065227x^2 +$
$0{,}503636x \mid 0 \le x \le 7{,}5$

[...]

6) Da die Steigung nicht gleich ist, nehme ich noch eine Bedingung hinzu: $f'(BCDE) \neq f'(AB)$

Vorherige Funktion überprüft, Steigung nahezu gleich → kein Knick

↳ KONKRETE WERTE ANGEB.
~~∗~~ $f'(0) = 0{,}503$

Steigung von $\overline{AB}$:
$f(x) = 0{,}5x$
$f'(x) = 0{,}5$

Da die Steigung im $\overline{BCDE}$ sichtlich größer als in $\overline{AB}$ ist, ✓ wähle ich einen größeren Wert als Steigung:
$f'(0) = 0{,}75 \Leftarrow$ im Punk B(0|0) ✓
Ich setze nun alle Bedingungen genau wie vorher ein, nur nehme ich diese Bedingung mit hinzu. Es ergibt sich ~~vet~~ folgende Funktion:
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ✓

SCHÖN

(7)

$A(-2|-1)$, $B(0|0)$, $C(2|0{,}75)$, $D(4|1)$, $E(7{,}5|0{,}3)$

→ Regressionskurve mit QuadReg

$-0{,}0547x^2 + 0{,}9428x + 0{,}0697$

↳ Probleme: • kein Knick bei B
• Punkte werden nicht genau getroffen

→ Polynom 4. Grades bilden (mit A, B, C, D, E)

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Matrix gebildet und mit rref gelöst

$f(x) = 0{,}000596x^4 + (-0{,}007593)x^3 + (-0{,}033634)x^2 + 0{,}467877x$

↳ Problem: • kein Knick bei B

→ Polynom 3. Grades bilden mit Punkten B, C, D und E

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Matrix gebildet + mit rref gelöst

$f(x) = 0{,}000455x^3 + (-0{,}065227)x^2 + 0{,}503636x$

Dann: Ableitung von $f(x)$

$f'(x) = 0{,}001365x^2 - 0{,}130454x + 0{,}503636$

Steigung an $x = 0$ herausfinden

$f'(0) = 0{,}503636$

⇒ Modell: $-2 < x < 0$: $f(x) = 0{,}503636x$

$0 < x < 7{,}5$: $f(x) =$ —

↳ Problem: kein Knick und geht nicht durch A

→ neues Modell: $0 < x < 7{,}5$:

→ $f(x) = 0{,}000455x^3 + (-0{,}065227)x^2 + 0{,}503636x$

$-2 < x < 0$:

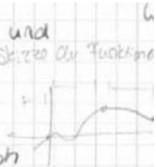
→ $f(x) = 0{,}5x$

↗

Endmodell; Alle Punkte sind berück-sichtigt und bei B ist ein kleiner Knick

(8)

A und B, sehr schlecht zwischen B, C und D und
wieder recht gut zwischen D und E



$f(2) = 0$, nicht 0,75 → schlechte Passung
$f(6) \approx 0{,}77143$ (Wert auch ungefähr auf Graph
zwischen A und B schwierig zu sagen, da der Umriss des
Autos sowieso nicht in A endet, so konnte ~~ein~~ hier auch keine
Funktion angepasst werden.
Grund für die schlechte Passung der 2. Funktion für B-D
ist sicherlich der zu hohe Grad der Funktion, jedoch wollte ich
alle Bedingungen einbeziehen. Ein neuer Versuch mit einer Funktion
niedrigen Grades ergibt sicher passendere Funktionen.
Auch ~~ich~~ berücksichtige ich nicht die Krümmungsunterschiede,
was zu einem "Ruck" führen könnte. Wollte man dies berück-
sichtigen, dürfte man jedoch für A-B keine Gerade nehmen
und für B,C,D gleichzeitig eine Parabel, da bei Geraden
die 2. Ableitung (Krümmung) immer gleich 0 ist, bei Parabeln
jedoch ~~nicht~~ nie. Man müsste also z.B. eine ~~Funkt~~ Parabel für
A-B wählen und ihre Krümmung berücksichtigen. (~)

(9)

6/ Die Steigung ~~beider~~ der Funktionen, die die Form des Autodaches bestimmen müssen im Punkt b eine ~~bessere~~ unterschiedliche Steigung haben. Dabei muss die Steigung der Funktion die durch die Punkte A und B verläuft etwas ~~größer~~ größer sein, als die Steigung der Funktion im Punkt B, die z. B. durch die ~~Funktion~~ Punkte ~~A~~ B, C, D ~~und~~ verläuft

[…]

↳ $f(x) = 0{,}5x \quad | -2 \leq x \leq 0$

$f'(x) = 0{,}5$

schön!

↳ Die Steigung des Autodaches muss im Punkt B ~~größer~~ geringer als 0,5 sein.

→ Ich wähle eine Funktion 3 Grades durch die Punkte ~~A~~ B, C und D und habe 4 Bedingungen: $f(0) = 0$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad f'(0) = 0{,}4$ ← etwas geringer als 0,5

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\quad f(2) = 0{,}75$

Daraus ergeben $\quad f(4) = 1$

[…]

Im TC eingeben, passt ganz gut.

→ Man kann es aber nicht genau überprüfen, da die Kurve ~~Funktion~~ des Autodachs nicht im Hintergrund mei TC, zu sehen ist.

→ Es gibt noch viele andere Möglichkeiten um die Form des Autodachs zu erhalten. Man könnte z. B. probieren, den Graph nur in zwei Teile einzuteilen, oder die erste Strecke zwischen A und B nicht a Gerade zu … modellieren

schön!

Wie beeinflussen Simulationen das funktionale Denken? Ergebnisse einer quantitativen Studie qualitativ beleuchtet

Michaela Lichti, Jürgen Roth

Das funktionale Denken von Sechstklässlern lässt sich durch den Einsatz von Computer-Simulationen (GeoGebra) und gegenständlichen Materialien positiv beeinflussen. Der Effekt von Simulationen ist allerdings deutlich größer. Vorgestellt wird neben der quantitativen Analyse eine qualitative Untersuchung von Schülerdokumenten, die während einer Intervention mit Materialien und Simulationen zum funktionalen Denken entstanden sind. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass Simulationen andere Aspekte des funktionalen Denkens fördern als gegenständliche Materialien. Ein kombinierter Einsatz beider Medien scheint daher erstrebenswert.

Einleitung

Funktionale Zusammenhänge sind ein wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts, sie sind relevant für andere Fächer wie Politik oder Naturwissenschaften und Teil unseres Alltags. Leider zeigen Studien immer wieder, dass Schülerinnen und Schüler (SuS) erhebliche Schwierigkeiten im Umgang mit dieser Thematik haben (Leinhardt et al., 1990). Es gelingt ihnen nicht, ihr Verständnis von funktionalen Zusammenhängen, ihr funktionales Denken angemessen zu entwickeln. Oft steht ihr persönliches *concept image* (Tall & Vinner, 1981) der offiziell anerkannten Definition, der *concept definition* (ebd.) entgegen. Des Weiteren zeigt sich wiederholt, dass SuS zahlreiche Fehlvorstellungen mit Blick auf funktionale Zusammenhänge haben (Nitsch, 2015). Beispielhaft sei auf den Graph-als-Bild Fehler verwiesen. Basierend auf der Relevanz der Thematik und den Schwierigkeiten der SuS mit ihr ergibt sich die Notwendigkeit, das funktionale Denken von SuS zu fördern. Die Theorie verweist hierzu auf die Verwendung von gegenständlichen Materialien und Computer-Simulationen, die im Rahmen von Experimenten zum Einsatz kommen. Durchgeführt wurde eine Interventionsstudie, die den Einfluss dieser beiden Medien auf das funktionale Denken zunächst quantitativ empirisch untersucht und diese Ergebnisse im nächsten Schritt qualitativ beleuchtet hat. Vorgestellt werden die Interventionsstudie, die Ergebnisse der quantitativen und qualitativen Analysen sowie deren Interpretation und Implikationen.

Theoretischer Hintergrund

Funktionales Denken

Funktionales Denken unterteilt sich in drei grundlegende Aspekte (Vollrath, 1989). (1) Der Zuordnungsaspekt umfasst, dass jedem Element x aus der Definitionsmenge genau ein Element y aus der Wertemenge zugeordnet wird. (2) Der Aspekt des Änderungsverhaltens nimmt die Änderung der abhängigen Variablen in Abhängigkeit von der Änderung der unabhängigen Variablen in den Blick. (3) Der Objektaspekt beschreibt, dass die Funktion als Ganzes betrachtet wird, sie wird als eigenständiges Objekt erfasst. Dies geschieht beispielsweise, wenn Funktionen addiert oder subtrahiert werden. Ein weiterer Ansatz, funktionales Denken zu beschreiben, verwendet die vier Repräsentationsformen verbale Beschreibung, Funktionsgleichung, Graph und Tabelle. Wenn SuS in der Lage sind, diese Formen zu verwenden, zu interpretieren und ineinander zu überführen bzw. miteinander zu verknüpfen, spricht man von funktionalem Denken (Nitsch, 2015).

Die Vorteile von Gegenständliche Materialien und Computer-Simulationen

Die Arbeit mit gegenständlichen Materialien ermöglicht es den SuS, funktionale Zusammenhänge zu erleben (Ludwig & Oldenburg, 2007). Ein Zusammenhang kann im wörtlichen Sinne begriffen und eine starke Verknüpfung zwischen mathematischer Darstellung und Realität geschaffen werden. Lernen wird nachhaltig (vom Hofe, 2003) und SuS verinnerlichen Ergebnisse und mathematische Arbeitsmethoden besser (Vollrath, 1987). Auch nach längerer Zeit greifen SuS auf die so vermittelten Inhalte zurück (Barzel & Ganter, 2010). Außerdem hat die Arbeit mit gegenständlichen Materialien einen positiven Einfluss auf die Motivation der SuS. Durch Computer-Simulationen bzw. die Verwendung von dynamischer mathematischer Software (DMS, in Rahmen dieser Studie GeoGebra) können SuS einen funktionalen Zusammenhang erkunden (Elschenbroich, 2011). Durch systematische Variation (Roth, 2008) von Variablen werden die Auswirkungen einzelner Parameter auf Graph, Tabelle und Funktionsvorschrift direkt sichtbar. Änderungsverhalten wird so z. B. erlebbar (Vollrath & Roth, 2012). Des Weiteren können verschiedenen Repräsentationsformen miteinander verknüpft werden, das Multi-Repräsentations-System erleichtert den Wechsel zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen (Roth, 2008). Die Simulation wird so Mittler zwischen SuS und mathematischem Phänomen (Danckwerts et al., 2000).

Studiendesign und Intervention

Die Studie folgte einem Pre-Posttest-Control-Group Design. Es nahmen N = 282 SuS der Jahrgangsstufe 6 aus 13 Klassen von 4 Schulen teil. Die Wahl fiel auf SuS der Jahrgangsstufe 6, um zu verhindern, dass sich Fehlvorstellungen bereits manifestiert hatten und um zwischen den verschiedenen Klassen sich entsprechende Ausgangsbedingungen zu schaffen. Denn funktionale Zusammenhänge werden erst ab Klasse 7 unterrichtet. Die SuS wurden randomisiert auf zwei Experimentalgruppen (EG1 mit N = 111, EG2 mit N = 121) und eine Kontrollgruppe (KG mit N = 48) verteilt. Die KG konnte aus organisatorischen Gründen nicht in die Randomisierung aufgenommen werden. Sie wurde lediglich verwendet, um einen möglichen Testeffekt auszuschließen. Alle Gruppen bearbeiteten zunächst einen Pretest zum funktionalen Denken. Es handelt sich um einen Paper-Pencil-Test, der auf Grundlage von Items aus PISA, TIMMS und VERA 8 selbst entwickelt und in einer Vorstudie mit N = 221 SuS validiert und auf seine Reliabilität hin überprüft wurde. Er beinhaltet 44 Items und orientiert sich an den Aspekten nach Vollrath, um das funktionale Denken abzudecken. Nach einer Woche nahmen die Experimentalgruppen an der Intervention (4 Schulstunden an einem Vormittag) zum funktionalen Denken teil. EG1 arbeitet in Einzelarbeit angeleitet durch Aufgaben ausschließlich mit gegenständlichen Materialien, EG2 mit Computer-Simulationen gestaltet mit GeoGebra. Danach bearbeiteten beide Gruppen den Posttest zum funktionalen Denken, der der KG ebenfalls vorgelegt wurde.

Die Intervention

Ziel der Intervention war die Förderung des funktionalen Denkens von SuS der 6. Jahrgangsstufe. Im Fokus stand das qualitative Verständnis funktionaler Zusammenhänge. Die syntaktische Repräsentationsform wurde dementsprechend und wegen des nicht vorhandenen Vorwissens der SuS ausgespart. Grundlage der Intervention waren verschiedene Kontexte, zu denen die SuS Experimente unter Verwendung eines der beiden Medien durchführen mussten. Die SuS wurden mittels Aufgaben durch die Experimente, deren Auswertung und Interpretation geleitet. Entscheidend war es, vergleichbare Settings zu generieren: Die Kontexte mussten in beiden Settings umsetzbar sein, vergleichbare Aktionen der SuS induzieren und für die Altersstufe angemessen sein. Zudem sollten die Kontexte unterschiedliche funktionale Zusammenhänge (linear, kubisch, beliebig, diskret und stetig) abdecken und die im theoretischen Hintergrund benannten Vorteile, die jedes Medium mit sich bringt, nutzbar machen. Die Vorteile der Medien sollten explizit nicht zu Gunsten der Vergleichbarkeit nivelliert werden. Denn nur, wenn die Vorteile beider Medien und damit wesentliche Unterschiede erhalten blieben, konnten Aussagen über den Einfluss der im Unterricht zu verwendenden Medien auf das funktionale Denken getroffen werden. Materialien und Simulationen werden im Unterricht schließlich gerade wegen ihrer Vorteile verwendet. Um Ergebnisse mit größtmöglicher Relevanz für die Schule zu erhalten, war die ökologische Validität daher als bedeutender anzusehen als die methodisch wünschenswerte absolute Angleichung der Settings. Der wesentlichste Unterschied zwischen den Settings bestand in der Art, wie SuS mit der graphischen Repräsentationsform arbeiteten. Die SuS aus der Materialgruppe mussten Graphen selbst zeichnen, die SuS der Simulationsgruppe beobachteten die Entstehung des Graphen im Koordinatensystem auf der Oberfläche von GeoGebra.

Die Kontexte – ein Beispiel

Ausgewählt wurden als Kontexte *Kreise abrollen* (Durchmesser und Umfang eines Kreises), *Würfel bauen* (Kantenlänge und Volumen eines Würfels angegeben durch die Anzahl von Einheitswürfeln), *Gefäße füllen* (Füllvolumen und Füllhöhe eines Gefäßes) und *Bleistifte spitzen* (Spitzbewegungen und verbleibende Länge eines Bleistifts). Beispielhaft wird der Kontext *Würfel bauen* vorgestellt.

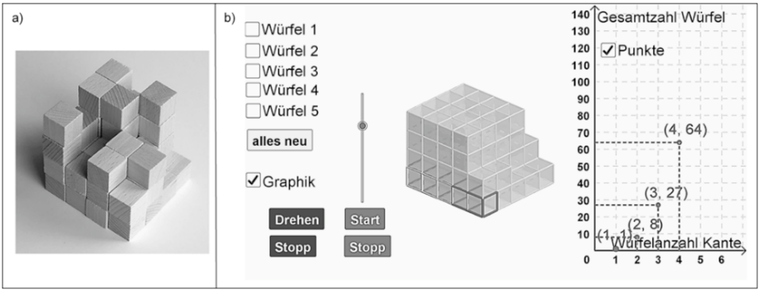


Abb. 1: a) Gegenständliche Materialien und b) Oberfläche der Simulation zu Würfel bauen. (Quelle: Privat)

Als Materialien (vgl. Abbildung 1a) erhielten die SuS der EG1 125 Holzwürfel. Das Experiment bestand daraus, aus den kleinen Würfeln jeweils einen großen Würfel mit einer Kantenlänge von ein, zwei, drei, vier oder fünf kleinen Würfel zu bauen. Die SuS sammelten die Werte in einer Tabelle und trugen die Punkte dann in ein Koordinatensystem ein. Die Simulation (Abbildung 1b) ermöglichte ein äquivalentes Vorgehen für die EG2. Zunächst wurden die verschiedenen Würfel „gebaut". Die SuS konnten durch Auswahl des Start-Buttons beobachten, wie die kleinen Würfel zusammengesetzt wurden, oder den Schieberegler hierzu verwenden. Sie konnten stoppen und den Würfel drehen und so die gesuchten Werte ermitteln. Durch Auswahl von *Graphik* öffnete sich das 2. Fenster. Wurde die Simulation dann erneut abgespielt, konnten die SuS beobachten, wie die zugehörigen Punkte im Koordinatensystem erschienen.

Aufgabengestaltung

Die SuS wurden anhand verschiedener Aufgabentypen durch die Intervention geleitet. Wir unterschieden Aufgaben zum (i) Schätzen, (ii) Experimentieren, (iii) Verständnis des jeweiligen Zusammenhangs, (iv) Verständnis der graphischen Repräsentationsform, (v) Anwenden (Bezug zu den Ergebnissen des Experiments) und (vi) Transfer (Aufgaben zum gleichen Kontext, die über das Experiment hinausgehen). Die Aufgaben der Kontexte, die am Anfang der Intervention standen, fokussierten die Aufgabentypen (i)-(iv). Die Aufgaben zu Kontexten der zweiten Hälfte der Intervention legten den Schwerpunkt auf die Typen (v) und (vi). Wichtig war es, die Aufgaben in beiden Settings äquivalent bzw. wenn möglich identisch zu gestalten. Außerdem musste sichergestellt werden, dass die SuS nicht zu völlig falschen Schlüssen kamen. Daher gab es Hilfekarten und in die Abfolge der Aufgaben eingepflegte Lösungen. Das gesamte Setting – die Materialien, Simulationen und Aufgaben - wurde im Rahmen einer Vorstudie auf seine Verwendbarkeit und die Äquivalenz hin getestet. Dazu bearbeiteten 30 SuS in Gruppen die Aufgaben unter Verwendung des jeweiligen Mediums, während sie gefilmt wurden. Die Videoaufzeichnungen wurden ausgewertet und basierend auf den Ergebnissen wurden die Medien und Aufgaben optimiert.

Auswertungsmethodik der quantitativen Analyse

Ausgewertet wurden die Daten aus Pre- und Posttest mittels Item Response Theorie. Zunächst wurden die Daten auf Rasch-Skalierbarkeit hin überprüft (Rost, 2004). Nach Überprüfung der Voraussetzungen (Normalverteilung, Varianzhomogenität) wurden die mit einem 2-dimensionalem Raschmodell ermittelten Fähigkeitswerte des SuS aus Pre- und Posttest mittels mixed ANOVA und pairwise t-Test (Bonferroni-Korrektur) verglichen. Die Ergebnisse der Kontrollgruppe wurden mit Wilcoxon-signed-Rank Test analysiert.

Ergebnisse der quantitativen Analyse

Die Ergebnisse unserer Studie zeigen, dass sowohl der Einsatz von gegenständlichen Materialien ($p < 0.001$, d = 0.46) als auch die Verwendung von Computer-Simulationen ($p < 0.001$, d = 0.85) geeignet ist, das funktionale Denken von Sechstklässlern zu fördern. Des Weiteren ergibt sich, dass in unserem konkreten Setting mittels Computer-Simulationen eine signifikant größere Steigerung des funktionalen Denkens erreicht wird (F = 8.86, $p = 0.006$**, $\eta^2_p = 0.090$). Die Kontrollgruppe weist keinen signifikanten Zuwachs ihres funktionalen Denkens auf (*Cramers V* = 423, $p = 0.091$).

Qualitative Analyse

Um mögliche Ursachen für dieses quantitativ empirische Ergebnis ermitteln zu können, wurde es qualitativ beleuchtet. Die Grundlage der qualitativen Analyse waren die schriftlich vorliegenden SuS-Antworten zur Aufgabe

Viele Gefäße (vgl. Abbildung 2), die während der Intervention zum Kontext Gefäße füllen bearbeitet wurde, und die Antworten zur Aufgabe Rennwagen, die Teil des Nachtests war. Beide Aufgaben verlangten die Zuordnung einer realen Situation zur graphischen Repräsentation des jeweiligen fokussierten Zusammenhangs. Die SuS mussten ihre Zuordnung in beiden Fällen begründen. Diese Begründungen wurden mittels qualitativer Inhaltsanalyse untersucht (Mayring, 2008). Nachdem induktiv Kategorien gebildet worden waren, wurde jeweils ein Rating (N = 2) und anschließend eine kommunikative Validierung durchgeführt. Der Vergleich der Häufigkeiten der Kategorien zwischen den Experimentalgruppen wurde mit Chi²-Test durchgeführt. Die Interpretation der unterschiedlichen Häufigkeiten ließ Schlüsse über den Einfluss der beiden Medien auf das funktionale Denken zu.

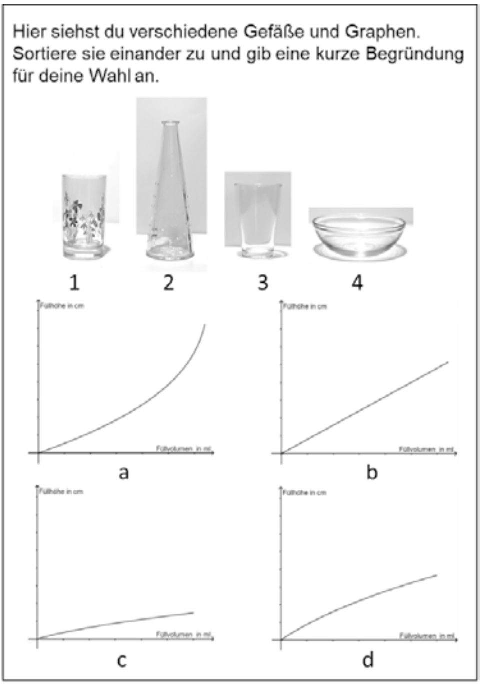


Abb. 2: Aufgabe „ Viele Gefäße“ (eigener Entwurf)

Auswertung der Aufgabe „Viele Gefäße“

Die SuS mussten zur Lösung dieser Aufgabe vier als Fotographie abgebildete Gefäße zu vier vorgegeben Füllgraphen zuordnen und ihre Wahl begründen. Basierend auf den Begründungen wurden induktiv fünf Kategorien gebildet, die das Schülerantwortverhalten beschreiben. Zunächst wurde unterschieden, ob die SuS ihre Zuordnung mittels der *Form des Gefäßes* (F), dem *Verlauf des Graphen* (G) oder dem *Ansteigen des Wassers* (A) begründeten. Diese Kategorien konnten pro Schülerantwort sowohl ausschließlich als auch in Kombination auftreten. Als weitere Kategorien ergaben sich *Zustand* (Z) und *Veränderung* (V). Nachdem alle Schülerantworten bereits auf die Verwendung von Form, Graph und Ansteigen des Wassers hin untersucht worden waren, wurde zusätzlich jede Begründung dahingehend codiert, ob die SuS einen Zustand (des Gefäßes, des Graphen oder des Füllstands) oder eine Veränderung (des Gefäßes, des Graphen oder des Füllstands) fokussiert hatten. Die Begründung *Die Schale ist flach.* erhielt daher den Code FZ. Der Bezug zur Schale lieferte die Kategorie *Form*, die Formulierung ***ist*** *flach* wurde als Zustandsbeschreibung gewertet. Im Gegensatz dazu erhielt die Antwort *Der Graph wird immer steiler.* den Code GV. Der Verweis auf den Graphen ist offensichtlich, die Formulierung **wird immer** deutet daraufhin, dass der betreffende Schüler bzw. die Schülerin den Verlauf und die damit einhergehende Veränderung des Graphen betrachtet hat. Das Verb *werden* ist hierfür besonders kennzeichnend.

Ergebnisse zur Aufgabe „Viele Gefäße“

Die Interrater-Reliabilität für alle Kategorien liegt zwischen [0.869; 0.986]. Der Vergleich der Häufigkeiten ergibt einen Unterschied zwischen den Gruppen hinsichtlich der Verwendung der Kategorien Form und Graph in ihrer ausschließlichen und in ihrer kombinierten Form. Die Kategorie Form findet sich in der Materialgruppe signifikant häufiger (ausschließlich: $\chi^2 = 4.16$, $p = 0.04$*, *Cramers* $V = 0.08$; kombiniert: $\chi^2 = 14.79$, $p < 0.001$, *Cramers* $V = 0.15$), die Kategorie Graph hingegen in der Simulationsgruppe (ausschließlich: $\chi^2 = 15.08$, $p < 0.001$, *Cramers* $V = 0.16$: kombiniert: $\chi^2 = 6.62$, $p = 0.01$*, *Cramers* $V = 0.10$). Des Weiteren zeigen sich signifikante Unterschiede in Bezug auf die Verwendung von Zustand und Veränderung.

Die Materialgruppe verweist signifikant häufiger auf einen Zustand ($\chi^2 = 4.361$, $df = 1$, $p = 0.037$*, *Cramers* $V = 0.08$), die Simulationsgruppe signifikant häufiger auf eine *Veränderung* ($\chi^2 = 6.955$, $df = 1$, $p = 0.008$**, *Cramers* $V = 0.11$).

Deutung

Die Ergebnisse liefern unter Berücksichtigung der kleinen und teilweise vernachlässigbaren Effektstärken lediglich erste Hinweise. Diese gehen dahin, dass die Verwendung von Simulationen zur Förderung des funktionalen Denkens dazu führt, dass die betreffenden SuS im Vergleich zu den SuS der Materialgruppe eher dazu ermutigt werden, die graphische Repräsentationsform zu nutzen. Auch scheinen sie ihren Fokus mehr auf Veränderung zu legen. Im Gegensatz hierzu scheinen die SuS der Materialgruppe eher dazu zu neigen, die reale Situation mit einzubeziehen und den Zustand im Blick zu behalten.

Auswertung der Aufgabe Rennwagen

Die Aufgabe Rennwagen verlangt von den SuS die Zuordnung eines Weg-Geschwindigkeit-Graphen zu einer von fünf aus der Vogelperspektive abgebildeten Rennstrecken. Drei der Rennstrecken waren bezüglich der abgebildeten Kurven prinzipiell mögliche Lösungen, die ein Verständnis von Graph und Rennbahnen zeigten, zwei waren falsch. Es ergaben sich vier Kategorien. Zwei gaben Aufschluss über die zur Lösung der Aufgabe relevanten Aspekte: (1) korrektes Wissen über den Zusammenhang von Geschwindigkeit und Kurven (GK); (2) auf Grundlage des Graphen Erkennen, dass die Strecke verschiedene Kurventypen haben muss. Zwei Kategorien bezogen sich auf Schwierigkeiten: (3) Graph-als-Bild Fehler; (4) Fehlinterpretation der abgebildeten Rennstrecken. Mehrfachcodierung war möglich. Des Weiteren wurde unterschieden, ob die SuS auf Basis ihrer Begründung eine mögliche oder eine falsche Lösung gegeben hatten. Dies sollte Informationen darüber liefern, welche Aspekte Einfluss auf die korrekte Lösung hatten.

Ergebnisse zur Aufgabe Rennwagen

Die Interrater-Reliabilität für alle Kategorien liegt zwischen [0.804; 0.929]. Der Vergleich der Häufigkeiten zeigt, dass die korrekte Verknüpfung von Geschwindigkeit und Kurven in beiden Gruppen vergleichbar oft benannt wird ($N_{Sim} = 17$, $N_{Mat} = 19$). Allerdings ergibt sich ein Unterschied, inwiefern dieses Wissen auch zum Ziel führt: Im Vergleich zur Simulationsgruppe können signifikant mehr SuS aus der Materialgruppe ihr eigentlich korrektes Wissen über Geschwindigkeit und Kurven in diesem Setting *nicht* umsetzen und gelangen zu einer falschen Lösung ($\chi^2 = 4.669$, $p = 0.031^*$, *Cramer V* = 0.18). Von den betreffenden SuS der Materialgruppe (N = 11) begehen vier den Graph-als-Bild Fehler, den keiner der betreffenden SuS aus der Simulationsgruppe (N = 3) macht. Des Weiteren fällt auf, dass die Fähigkeit, aus dem Graphen die Erkenntnis ableiten zu können, dass es verschiedene Typen von Kurven auf der Strecke geben muss, bedeutend für die Lösung der Aufgabe ist. Von 22 SuS, die diesen Zusammenhang benennen, wählen 21 eine der möglichen Antworten, die ein Verständnis von Graph und Strecke zeigen.

Deutung

Auch in diesem Fall liefern die Ergebnisse auf Grund kleiner Zahlen und Effektstärken lediglich Indizien. Diese deuten darauf hin, dass die Verwendung von Simulationen dazu führt, dass SuS das vorhandene und korrekte Alltagswissen, in diesem Fall über Geschwindigkeit und Kurven, besser mit der vorgegeben graphischen Repräsentation verknüpfen können, was sich in der geringeren Anzahl falscher Antworten und dem Nicht-Auftreten des Graph-als-Bild-Fehlers möglicherweise andeutet. Die Fähigkeit, den Graphen im Hinblick auf die unterschiedlichen Kurventypen korrekt zu deuten, scheint relevant für die Wahl einer möglichen Lösung. Obwohl sich kein signifikanter Unterschied zwischen den Gruppen zeigt, gelingt dies 14 SuS der Simulationsgruppe und nur 7 SuS der Materialgruppe. Die Fähigkeit, den Graphen korrekt zu interpretieren, ist daher gegebenenfalls in der Simulationsgruppe eher vorhanden.

Quantitative und qualitative Ergebnisse zusammenbringen

Sowohl der Einsatz von gegenständlichen Materialien als auch von Computer-Simulationen hat einen positiven Einfluss auf das funktionale Denken. Beide Medien scheinen jedoch auf unterschiedliche Aspekte funktionalen Denkens zu wirken. Basierend auf den qualitativen Ergebnissen lässt sich vermuten, dass Materialien den Fokus der SuS auf die reale Situation und Zustände lenken. Eine Untersuchung des Zuwachses der Lösungsraten einzelner Aufgaben von Pre- zu Posttest gab Hinweise darauf, dass sich dies besonders auf das Verständnis von Punkten und damit eventuell auf das Verständnis des Zuordnungsaspekts auswirkt. Simulationen hingegen scheinen den Blick der SuS auf den Graphen zu lenken und den Aspekt der Änderung in den Vordergrund zu rücken. Dieser Fokus führt gegebenenfalls dazu, dass die SuS graphische Repräsentationsformen besser mit realen Situationen verknüpfen können, was möglicherweise als beginnendes Verständnis des Objekt-Aspekts und sicher als Fähigkeit zum Repräsentationswechsel gewertet werden kann.

Implikationen

Beide Medien können und sollten zur Förderung des funktionalen Denkens eingesetzt werden. Mit Blick auf das von uns in dieser Studie fokussierte qualitative Verständnis funktionaler Zusammenhängen stellen sich Computer-Simulationen in der von uns verwendeten Art allerdings als Mittel der Wahl dar. Sie scheinen den Blick für qualitatives Änderungsverhalten und die Fähigkeit oder auch Bereitschaft, Graphen zu verwenden und diese mit realen Situationen zu verknüpfen, zu stärken. Die Verwendung von gegenständlichen Materialien sollte sich jedoch unweigerlich anschließen, um auch das quantitative Verständnis zu schulen. Für die Lehreraus- und -weiterbildung impliziert dies, dass es unumgänglich ist, zu vermitteln, wie entsprechende Simulationen mittels GeoGebra angemessen gestaltet und eingesetzt werden können. Nur dann sind unsere Ergebnisse für den Unterricht nutzbar zu machen.

Literatur

Barzel, B., & Ganter, S. (2010). Experimentell zum Funktionsbegriff. PM, 52(31), 14–19.

Danckwerts, R., Vogel, D., & Maczey, D. (2000). Ein klassisches Problem – dynamisch visualisiert. MNU, 53(6), 342–346.

Elschenbroich H.-J. (2011). Geometrie, Funktionen und dynamische Visualisierung. In T. Krohn (Hrsg.), Mathematik für alle. Wege zum Öffnen von Mathematik - mathematikdidaktische Ansätze. Festschrift für Wilfried Herget (S. 69–84). Hildesheim: Franzbecker.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing. Tasks, Learning, and Teaching. Review of Educational Research, 60 (1), 1-64.

Ludwig, M. & Oldenburg, R. (2007). Lernen durch Experimentieren. Handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik. ml. (141), 4-11.

Mayring, P. (2008). Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken (10. Auflage). Weinheim: Beltz.

Nitsch, R. (2015). Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge: Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Rost, J. (2004). Lehrbuch Testtheorie – Testkonstruktion. Bern: Huber.

Roth, J. (2008). Systematische Variation: Eine Lernumgebung vernetzt Geometrie und Algebra. ml. (146), 17–21.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12(2), 151–169.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. JMD (10), 3–37.

Vollrath, H.-J. (1978). Schülerversuche zum Funktionsbegriff. MU, 24(4), 90–101.

Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellung. ml. (118), 4–8.

Einblicke in den Entstehungsprozess einer auf STACK basierenden digitalen Mathematikaufgabe zur Division von Polynomen

Tobias Mai

In diesem Beitrag wird der Entstehungsprozess einer auf STACK basierenden digitalen Mathematikaufgabe vom Beginn der Aufgabenidee an bis hin zur (vorläufigen) Fertigstellung anhand des Beispiels einer Aufgabe zur Polynomdivision beschrieben. Auf diese Weise soll ein realistischer Einblick in die verschiedenen Phasen der Entwicklung gegeben und die Probleme, die während dieses Prozesses auftreten können, erläutert werden. Schließlich wird die entstandene Aufgabe auch anhand empirischer Daten aus der Praxis reflektiert und somit werden sowohl Grenzen ihres Nutzens als auch weitergehendes Entwicklungspotential aufgezeigt.

Einleitung

Vor einigen Jahren ist es möglich geworden, neuartige und vielfältige Mathematikaufgaben am Computer mit Hilfe von eigens dafür bereitgestellten Autorenwerkzeugen, welche die Aufgabenerstellung ohne Programmierkenntnisse ermöglichen, zu gestalten. Computer Algebra Systeme unterstützen die automatisierte Auswertung und machen es möglich, Aufgaben wie „Geben Sie ein Beispiel für eine quadratische Funktion an, deren Graph nicht durch den ersten Quadranten des Koordinatensystems verläuft" zu stellen und durch die automatisierte Auswertung umgehend ein Feedback auf Antworten von Lernenden zu geben. Es ist von Bedeutung, auch einen Blick auf die Entwicklungsphasen zwischen der Idee und der fertigen Aufgabe zu werfen, da diese selten in der Literatur beschrieben werden, aber bei der praktischen Arbeit zur Erstellung solcher Aufgaben von entscheidender Relevanz sind.

Ein Beispiel für eine solche Software ist STACK[2], welches für die Erstellung der in diesem Beitrag beschriebenen Aufgabe verwendet wurde.

2Wie die Schreibweise bereits andeutet ist STACK ein Akronym, welches für **S**ystem for **T**eaching and **A**ssesment using a **C**omputer algebra **K**ernel steht.

Es gibt jedoch weitere Programme, zum Beispiel WIRIS Quizzes (Calm et al., 2012), welche in Forschung und Praxis eingesetzt werden. Ein mögliches Einsatzszenario für digitale Mathematikaufgaben sind studienvorbereitende Mathematikvorkurse, welche diese unterstützend zum Kurskonzept einsetzen oder verstärkt auf selbstreguliertes Lernen setzen, d.h. E-Learning oder Blended Learning Szenarien enthalten. Im Folgenden wird eine neue Aufgabe zur Polynomdivision zusammen mit ihren Entwicklungsschritten bei der Aufgabengestaltung im Vorkursmaterial des VEMINT[3]-Projekts beschrieben.

Der Kontext – Digitale Mathematikaufgaben im VEMINT-Projekt

Die im Folgenden detailliert beschriebene Aufgabe entstammt dem VEMINT-Projekt (s. www.vemint.de für ausführlichere Informationen). Zum VEMINT-Vorkurs-Konzept gehört ein interaktives Buch, welches in thematisch abgeschlossene Module gegliedert ist (Bausch et al., 2014). Diese Lernmodule werden von "diagnostischen" Vor- und Nachtests begleitet, die den Lernenden passend zum zugehörigen Modul Rückmeldungen zum eigenen themenbezogenen Wissen geben können. Dies ist sowohl für den Einsatz vor dem Lernen, "Muss ich das noch lernen?", als auch nach dem Lernen, "Habe ich mich intensiv genug mit dem Lerngegenstand des Moduls beschäftigt?", gedacht. Gleichzeitig bietet die Auseinandersetzung mit Aufgaben zu einem Thema auch stets eine Lerngelegenheit, sodass zu allen Aufgaben im Anschluss ein Lösungsvorschlag präsentiert und individuell auf Möglichkeiten zum Weiterarbeiten bzw. individuelle Fehler hingewiesen wird. Dozenten[4] können die diagnostischen Tests vor- und nachbereitend in ihr Kurskonzept einbinden, indem etwa die Teilnehmer eines Präsenzkurses zur Vorbereitung einer kommenden Sitzung aufgefordert werden, einen Vortest zu einem Thema auszufüllen. Damit eröffnet sich dem Dozenten die Möglichkeit auf individuelle

3VEMINT ist ein Akronym für **V**irtuelles **E**ingangstutorium für **MINT**-Fächer

4Ich verwende an dieser Stelle und auch im Folgenden die männliche Form, da sie zumeist die kürzeste ist und alle mir bekannten weiteren Schreibweisen für die Lesbarkeit eines Textes eher hinderlich sind und/oder weniger klare Geschlechterzuordnungen nicht mit einbeziehen. In diesem Beitrag meine ich in solchen Fällen stets Menschen jeglichen Geschlechts.

Schwächen und Stärken der Lerngruppe einzugehen. Die hier im Folgenden diskutierte Aufgabe ist Teil eines solchen diagnostischen Nachtests.

Ein sehr kurzer Überblick über die Software STACK

Die zur Entwicklung der Polynomaufgabe verwendete Software STACK ist ein Plug-In für das Learning Management System Moodle[5] und erweitert Moodle um einen neuen Fragetypen, sodass sich STACK aus Sicht der Lernenden nahtlos in das System einfügt. Vor allem – aber nicht nur – werden so freie Formeleingaben mit adäquater Auswertung möglich. Durch diesen neuen Fragetypen kommt eine Reihe neuer Funktionen für Dozenten hinzu, welche Moodle in der Standardinstallation nicht bietet. Mathematische Formeln können eingegeben und durch das Computer Algebra System Maxima ausgewertet werden. STACK ermöglicht es, verschiedene Auswertungsabfragen, die aufeinander aufbauen, der Reihe nach durchzuführen. Im Hintergrund entsteht somit ein Auswertungsbaum (gerichteter, azyklischer Graph) für die Eingabe von Lernenden. Während der Auswertung ist es möglich, auf Wunsch in jedem einzelnen Auswertungsschritt spezifisches Feedback für die Lernenden zu generieren. Ferner kann der Auswertung eine Syntax-Prüfung vorgeschaltet werden, die Lernende bereits vor der Abgabe auf etwaige Probleme hinweist. Somit besteht die Möglichkeit syntaktisch inkorrekte Eingaben durch Lernende zu vermeiden. Ausführlichere Informationen zu der Software STACK sowie dem didaktischen Potential der Software finden sich zum Beispiel bei Sangwin (2007), dem ursprünglichen Entwickler von STACK, oder in Kallweit (2016).

Die Aufgabe zur Polynomdivision

Die Aufgabenstellung in der bisher aktuellen Form ist wie folgt formuliert:

> *„Geben Sie zwei Polynome $f(x)$ und $g(x)$ an, die aus mindestens zwei Summanden bestehen, sodass die Polynomdivision $f(x):g(x)$ ohne Rest aufgeht. Dabei gelte $f(x) \neq g(x)$ und $x \in \mathbb{R}$.“*

5Für das LMS ILIAS gibt es ebenfalls ein STACK Plug-In und Fragen können zwischen den Systemen ausgetauscht werden.

Unter der Aufgabenstellung befinden sich zwei Eingabefelder zur freien Formeleingabe ohne weitere Beschränkung der Eingabe. Dennoch sind die Eingabefelder mit der Syntaxvalidierung verbunden, sodass syntaktische Eingabeprobleme noch vor der Abgabe der Antwort von den Lernenden bemerkt und korrigiert werden können. Wie STACK die Eingabe darstellt bevor die Antwort abgegeben wurde, ist in Abb. 1 zu sehen. Nach der Abgabe der Antwort erhält der Lernende Feedback zu seiner eigenen Antwort. Hierbei wird vom System geprüft, ob die diversen Voraussetzungen erfüllt sind (Terme sind Polynome, bestehen aus mindestens zwei Summanden und sind nicht äquivalent) und bei Bedarf eine Rückmeldung dazu gegeben. Des Weiteren folgt die Auswertung, ob die Polynomdivision wie gefordert ohne Rest aufgeht, insofern die Voraussetzungen erfüllt sind. Diese Auswertungsschritte und die angegebene Formulierung der Aufgabenstellung sind in der hier dargestellten kompakten Form als Ergebnis eines mehrstufigen Entwicklungsprozesses, welcher nachfolgend ausführlich beschrieben wird, entstanden.

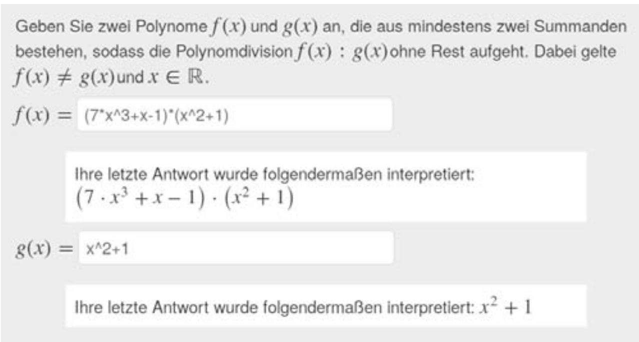


Abb. 1: Die mit STACK umgesetzte Aufgabe zur Polynomdivision aus der Sicht eines Lernenden mit einer exemplarischen Eingabe und dem Syntax-Feedback des Systems.

Auswertung der Lösungseingabe vom System

Für einige Leser mag neben dem didaktisch-konzeptionellen Aufbau der Aufgabe auch ihr technischer Aufbau von Interesse sein. In Abb. 2 ist deshalb eine Darstellung des Auswertungsbaumes zur vorgestellten Aufgabe in der derzeit aktuellen dritten Version zu sehen. Die folgende Aufzählung erläutert die einzelnen Prüfschritte im Auswertungsbaum.

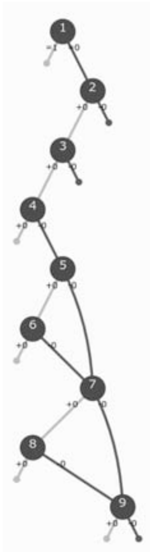


Abb. 2: Von STACK selbst erstellte Visualisierung des Auswertungsbaumes der im Wintersemester 2017/18 im VEMINT-Material an mehreren Standorten eingesetzten Version 3 der Aufgabe.

Dabei bezieht sich die Nummerierung der Schritte auf die Nummerierung der Knoten in Abb. 2. Jeder Schritt im Auswertungsbaum führt bei Bedarf zu einer entsprechenden Rückmeldung an den Lernenden.

- Sind beide Eingaben verschieden?
- Ist f(x) ein Polynom?
- Ist g(x) ein Polynom?
- Gilt grad(f(x)) ≥ grad(g(x))?
- Enthält der Polynom-Term von f(x) in der ausmultiplizierten Darstellung ein Plus-Zeichen?
- Enthält der Polynom-Term von f(x) in der ausmultiplizierten Darstellung ein Minus-Zeichen? Zusammen mit 5. wird hier also geprüft, ob das Polynom f(x) aus min. zwei Summanden besteht.
- Enthält der Polynom-Term von g(x) in der ausmultiplizierten Darstellung ein Plus-Zeichen?

- Enthält der Polynom-Term von g(x) in der ausmultiplizierten Darstellung ein Minus-Zeichen? Zusammen mit 7. wird hier also geprüft, ob das Polynom g(x) aus min. zwei Summanden besteht.
- Geht die Polynomdivision f(x):g(x) auf?

Der Entwicklungsprozess der Aufgabe

Der Vorläufer der Aufgabe zur Polynomdivision

Ausgangspunkt der Entwicklung der oben formulierten und mit STACK umgesetzten Aufgabe im diagnostischen Test war eine Aufgabe ohne Eingabemöglichkeit einer Antwort im System, deren Lösung die Lernenden im Anschluss eigenständig durch den Vergleich mit einem Lösungsvorschlag bewerten sollten. Die Aufgabenformulierung war:

> *„Wie kann man immer zwei Polynome finden, deren Polynomdivision ohne Rest aufgeht?“*

Der darauffolgende Lösungsvorschlag zur Aufgabe lautete:

> *„Indem man zwei Polynome f(x) und g(x) miteinander multipliziert, erhält man immer als Ergebnis ein Polynom P(x), sodass die Division f(x) ≠ g(x) keinen Rest lässt und das Ergebnis g(x) hat.“*

Nun sollte diese Aufgabenstellung so umformuliert werden, dass eine automatische Auswertung mit Hilfe von STACK möglich wird, und dadurch die selbstständige Eigenbewertung durch die Lernenden entfallen kann. Gleichzeitig sollte die Kernidee der Aufgabe, nämlich eine (teilweise) faktorisierte Darstellung von Polynomen auszunutzen, nach Möglichkeit in der neuen Aufgabe wiederzufinden sein.

Die erste Version der Aufgabe

Die erste Idee dazu war, den Lernenden aufzufordern, konkret zwei Polynome f(x) und g(x) anzugeben, deren Division ohne Rest aufgeht. Für die Eingabe der Lernenden waren bereits zu diesem Zeitpunkt in der Entwicklung zwei freie Eingabefelder für die Terme vorgesehen. Dies wurde auch in den weiteren Versionen der Aufgabe beibehalten. Die erste Aufgabenstellung war wie folgt formuliert:

„Geben Sie zwei Polynome f(x) und g(x) an, sodass die Polynomdivision ohne Rest aufgeht. Dabei gelte $x \in \mathbb{R}$."

Aus der ersten Aufgabenformulierung leiteten sich automatisch Anforderungen für die Erstellung des zugehörigen Auswertungsbaumes ab. Es musste geprüft werden, inwiefern es sich bei beiden Eingaben tatsächlich um Polynome handelt und inwiefern das Ergebnis der Division beider Polynome selbst ein Polynom, also die Division ohne Rest durchführbar ist. Eine formative Evaluation deckte zwei kleinere Probleme mit der Aufgabe auf. Zum einen ist die triviale Lösung, zwei identische Polynome einzugeben, in der Aufgabenstellung nicht eingeschränkt gewesen. Zum anderen war nicht festgelegt, welche Division – also f(x):g(x) oder g(x):f(x) – ohne Rest aufgehen sollte.

Die zweite Version der Aufgabe

Die in der ersten Evaluation der Aufgabe aufgedeckten Probleme wurden wie folgt gelöst. Ersteres Problem, die Eingabe identischer Terme, haben wir durch eine Ergänzung der Aufgabenstellung um die Forderung $f(x) \neq g(x)$ und einen expliziten Test auf algebraisch äquivalente Eingaben für f(x) und g(x) in der Auswertung gelöst. Das zweite Problem, die nicht festgelegte Zuordnung von Divisor und Dividend, konnte auf zwei Wegen gelöst werden. STACK kann durchaus auf Kosten einer erhöhten Komplexität der Auswertung im Hintergrund beide Fälle unterscheiden und ein passendes Feedback geben. Die Entscheidung fiel jedoch darauf, die Aufgabenstellung weiter zu präzisieren und vorzugeben, dass es um die Division f(x):g(x) geht. Somit wird insbesondere die Wahrscheinlichkeit verringert, dass eine geratene Eingabe eine korrekte Lösung ist, falls zufällige Polynome eingegeben werden.

Aus der vorhergehenden Evaluation ergaben sich entsprechende Korrekturen des Auswertungsbaumes sowie die folgende Formulierung der Aufgabenstellung:

„Geben Sie zwei Polynome f(x) und g(x) an, sodass die Polynomdivision f(x):g(x) ohne Rest aufgeht. Dabei gelte $f(x) \neq g(x)$ und $x \in \mathbb{R}$."

Im nächsten Testdurchlauf nach der Überarbeitung der Frage, ist aufgefallen, dass auch triviale Lösungen mit Polynomen nullten Grades eingegeben werden konnten. Die vermeintlich einfachste Lösungsmöglichkeit für die Aufgabe war es, zwei natürliche Zahlen anzugeben, sodass deren Quotient – zum Beispiel 42:7 – eine natürliche Zahl ist. Obgleich eine solch triviale Lösung ihren Charme hat und sicherlich eine sehr geschickte Lösung ist, war die Intention der ursprünglichen Aufgabe wie zuvor beschrieben auf die Idee ausgelegt, dass ein Polynom als Produkt zweier anderer Polynome durch diese beiden Faktor-Polynome teilbar ist.

Die dritte Version der Aufgabe

Als Konsequenz aus der Evaluation der zweiten Aufgabenversion ergab sich, dass Anforderungen an die Komplexität der als Antwort eingegebenen Polynome gestellt werden mussten. Zuerst war es naheliegend, einen Mindestgrad der eingegebenen Polynome zu fordern. Allerdings steigert diese Vorgabe alleine die Komplexität kaum, wie es der Quotient $x^{100} : x^{50}$ beispielhaft verdeutlicht. Damit ergab sich für uns, dass wir die Komplexität des Polynoms stattdessen durch die Forderung nach mindestens zwei Summanden erhöht haben und somit die folgende Aufgabenstellung:

> *„Geben Sie zwei Polynome f(x) und g(x) an, die aus mindestens zwei Summanden bestehen, sodass die Polynomdivision f(x):g(x) ohne Rest aufgeht. Dabei gelte* $f(x) \neq g(x)$ *und* $x \in \mathbb{R}$.*“*

Die dritte Version der Aufgabe entspricht der zu Beginn im Abschnitt „Die Aufgabe zur Polynomdivision“ vorgestellten Aufgabe zur Polynomdivision. Da die anschließende Evaluation dieser Aufgabenversion zunächst keinen maßgeblichen Änderungsbedarf mehr aufdeckte, ist diese dritte Version als erste in der Praxis (Vorkurse im WS 2017/18) erprobt worden.

Die vierte Version der Aufgabe

Eine vierte Version der Aufgabe wurde während der Entstehung des Artikels noch nicht umgesetzt. Demnächst wird es jedoch eine weitere Überarbeitung – abgeleitet aus den Erkenntnissen der Qualitätssicherung im Nachhinein des vergangenen Vorkurses im Wintersemester 2017/18 – geben. Durch den Einsatz der Aufgabe in der Praxis konnten noch einige interessante Erkenntnisse über die Aufgabe gewonnen werden, die für die Aufgabe umgesetzt werden sollen. Dies wird im folgenden Abschnitt nähergehend erläutert.

Qualitätssicherung der erstellten Aufgabe

Im Erstellungsprozess der Aufgabe sowohl aus der technischen als auch aus der didaktischen Perspektive ist das sorgfältige Testen und Prüfen der Aufgabe mitsamt der tatsächlichen Eingabe von Lösungen im System wichtig. Auch kreative Eingaben abseits der primär erwarteten Eingaben sollten so weit wie möglich gesucht und getestet werden. Dies erleichtert das Auffinden von didaktisch-konzeptionellem Verbesserungspotential und zugleich von Fehlern in der Implementierung des Auswertungsbaumes. Dazu hat sich in der Praxis während der initialen Entwicklungsphase ein vier Augen Prinzip als zielführend erwiesen. Bezüglich der didaktisch-konzeptionellen Verbesserungen ist oben unser schrittweises Vorgehen im Zuge der Optimierung der Aufgabe beschrieben worden. Technische Fehler, wie inkorrekte Befehle im Auswertungsbaum, sind in der Praxis nicht minder von Bedeutung. Mit solchen Fehlern geht der potentielle Mehrwert einer digitalen Aufgabe mit automatischer Auswertung – gerade im Vergleich zum vorherigen Aufgabenformat mit Selbstbewertung – im Zweifel verloren. Darüber hinaus führen inkorrekte Rückmeldungen womöglich zu Verwirrungen bei den Lernenden oder wenigstens zu unnötigen Zeitverlusten durch die Mühen zur Aufklärung des Sachverhaltes. STACK bietet hier zur Unterstützung der Dozenten an, verschiedene Testeingaben zu hinterlegen und zu vermerken, zu welchen Rückmeldungen der Auswertung diese führen sollten (Unit-Tests). Das ist besonders hilfreich, wenn auf einer der oberen Ebenen am Entscheidungsbaum Veränderungen vorgenommen wurden, da ein Fehler an einer solchen Stelle die gesamte Aufgabe (d.h. genauer gesagt die Auswertung und ihr Feedback) unbrauchbar machen könnte.

Qualitätssicherung hört jedoch an diesem Punkt nicht auf. Nachdem eine Aufgabe sorgfältig entwickelt und getestet wurde, kann sie in der Praxis eingesetzt werden (bzw. mit einer geeigneten Gruppe pilotiert werden). In unserem Fall war dies der Einsatz im Vorkurs. Die Antworten der Studierenden in den Vorkursen zum Wintersemester 2017/18 haben an verschiedenen Standorten und mit verschiedenen Studiengängen ergeben, dass keine Antworten der Art $f(x) = (x^3+x-1)(x^2+1)$ und $g(x) = x^2+1$ gegeben wurden. Stattdessen wurden durchgehend vollständig ausmultiplizierte Polynomdarstellungen bevorzugt, z.B. $f(x) = 20x+20$ und g(x) = 4x+4. Mit einem Blick auf den ersten Teil der Formulierung in der Aufgabenstellung „Geben Sie zwei Polynome f(x) und g(x) an, die aus mindestens zwei Summanden bestehen“ kommt der Verdacht auf, dass diese das Antwortverhalten der Lernenden begünstigt. Als didaktische Fragestellung wäre hier interessant zu untersuchen, ob die Summenschreibweise für Polynome einer faktorisierten oder teilweise faktorisierten Darstellung stets vorgezogen wird oder ob die Suggestion durch den Begriff „Summanden“ in der Aufgabenstellung hier maßgeblichen Einfluss hatte. Andererseits hat die Auswertung der Antworten gezeigt, dass diese Formulierung sehr gut verstanden wurde und das Lösen der Aufgabe daran im Wesentlichen nicht scheiterte. Hinsichtlich der Aufgabenstellung ist derzeit angedacht, die Formulierung mit dem Wort „Summanden“ zu streichen und durch eine Aufforderung, keine trivialen Polynome mit nur einem Koeffizienten ungleich null anzugeben, zu ersetzen. Alternativ könnten auch mehr als zwei Summanden je Polynom gefordert werden, sodass einfachere Lösungsmöglichkeiten wegfallen und die Wahrscheinlichkeit größer wird, dass die Idee einer faktorisierten Darstellung des Dividenden angewendet wird. Ferner ist es nicht unbedingt wünschenswert, wenn beide Polynome denselben Grad haben, wie die oben bereits genannte Beispielantwort f(x) = 20x+20 und g(x) = 4x+4 eines Studierenden veranschaulicht.

Abschließendes

In diesem Beitrag wurde eine bestehende Aufgabe als Ausgangspunkt für die Neu- bzw. Weiterentwicklung gewählt. Dabei wurde versucht, die didaktische Idee der Faktorisierung aus der ursprünglichen Lösung so gut es geht zu erhalten. Nach der Umsetzung mit STACK ist die Aufgabe allerdings auch ohne diese Kernidee lösbar, obwohl dies weiterhin die vermeintlich eleganteste Methode ist, um schnell eine korrekte Lösung einzugeben. Dem gegenüber steht das neu hinzugekommene detaillierte Feedback für die Lernenden direkt nach der Bearbeitung der Aufgabe. Deshalb gibt es sowohl für die Ursprungsvariante als auch für die neue Umsetzung gute Argumente für ihren Einsatz. Für den Prozess der Aufgabengestaltung sollte berücksichtigt werden, dass didaktische Ideen und technische Möglichkeiten sich leider (noch) nicht immer in Einklang bringen lassen und manchmal Kompromisse eingegangen werden müssen.

Dafür fördert der technische Rahmen die Kreativität bei der Aufgabenerstellung und schafft auch Möglichkeiten, die es vorher gar nicht gab.

Anhand der ausführlichen Beschreibung der Aufgabe und ihres Entwicklungsprozesses wird einmal mehr deutlich, dass die Erstellung von intelligenten Aufgabenstellungen kein triviales Unterfangen ist. Noch mehr gilt dies, wenn dazu eine passende automatische Auswertung erfolgen soll, weil die Aufgabe mit Hilfe einer Software umgesetzt wird. Technische Aspekte und didaktische Wünsche gehen Hand in Hand und müssen teilweise gegeneinander abgewogen werden. Neben der Idee der Aufgabenstellung können Formulierungen oder einzelne Worte (wie z. B. „Summanden") unbeabsichtigte Auswirkungen haben oder Gestaltungen der Eingabemöglichkeiten bereits in Teilen die Lösung der Aufgabe vorwegnehmen.

Somit stellt sich die Frage, inwiefern die Entwicklung solcher Aufgaben erstrebenswert sein kann, wenn bereits die Weiterentwicklung einer bestehenden Aufgabe einen solchen Aufwand und mehrere Entwicklungsphasen mit sich bringt. Dies lohnt sich insbesondere dann, wenn Aufgaben wiederholt eingesetzt werden können oder mehrfach parallel verwendet werden – wie es mit der beschriebenen Aufgabe im Vorkurs der Fall ist. Eventuell sind auch weitere Features von STACK wie die Randomisierung von Aufgaben in bestimmten Kontexten von gesondertem Interesse und ein guter Grund, um damit zu arbeiten. Erfahrungsgemäß ist es jedoch ratsam, nicht allzu kurzfristig Aufgaben mit STACK zu erstellen. Oft genug klappt etwas nicht auf Anhieb wie gewünscht und es sollte etwas zeitlicher Puffer für solche Fälle eingeplant werden. Gleichwohl können einfachere Aufgaben als die hier vorgestellte mit bedeutend weniger Aufwand erstellt und geprüft werden, wenn weniger Flexibilität in der Auswertung und der Eingabevielfalt erforderlich ist.

Insgesamt zeigt sich nach unseren Erfahrungen und Evaluationen für den Einsatz von (intelligenten) digitalen Mathematikaufgaben in Vorkursen mit den VEMINT-Materialien, dass es einen didaktischen Mehrwert bei vielen Aufgaben gibt und die STACK-Aufgaben auch bei den Studierenden bisher gut ankommen. Folglich ist geplant, die dahingehenden (Weiter-) Entwicklungen auch in Zukunft fortzusetzen.

Literatur

Bausch, I.; Biehler, R.; Bruder, R.; Fischer, P.; Hochmuth, R.; Koepf, W.; Wassong, T. (2014): VEMINT – Interaktives Lernmaterial für mathematische Vor- und Brückenkurse. In Bausch, I.; Biehler, R.; Bruder, R.; Fischer, P.; Hochmuth, R.; Koepf, W.; Schreiber S.; Wassong, T. (Hrsg.): *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven*. S. 261-276. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Calm, R., Ripoll, J., Masià, R., Sancho-Vinuesa, T., Olivé, C., Parés, N., & Pozo, F. (2012). Wiris Quizzes: An automatic and self-study tool for online mathematics: The teaching experience in engineering courses at Universitat Oberta de Catalunya. In *Computers in Education (SIIE), 2012 International Symposium on* (pp. 1-6). IEEE.

Kallweit, M. (2016). CAS-unterstütztes Assessment von Mathematik. In: *Computeralgebra-Rundbrief: Vol. 59*.

Sangwin, C. J. (2007). Assessing elementary algebra with STACK. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(8), 987-1002.

Ansatz einer Modulkonzeption zur Aus- und Weiterbildung im Bereich Medien im Mathematikunterricht

Anje Ostermann, Anke Lindmeier

Digitale Medien und zugehörige Arbeitsweisen gewinnen in der Gesellschaft und damit auch in der Schule zunehmend an Bedeutung. Aufgabe der Lehrkräfte ist es, den Einsatz von Medien im Mathematikunterricht kriteriengeleitet planen und reflektieren zu können. Das Wissen zum Unterrichten mit digitalen Medien wird aber bisher zum großen Teil privat erworben, sodass sich hier ein Bedarf an Weiterbildungsangeboten, insbesondere auch im fachdidaktischen Bereich ergibt. Dies wirft die Frage auf, auf welche theoretischen Ansätze bei der Planung, Analyse und Reflexion zurückgegriffen werden kann. Die Projektgruppe des Projekts „MiU-Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht“ schlägt dafür vor, Merkmale des Mediums und des Medieneinsatzes sowohl auf Sicht- als auch auf Tiefenstrukturebene in den Blick zu nehmen. In diesem Beitrag werden für die sich daraus ergebenen Merkmale von Medieneinsatz theoretische Ansätze zur Reflexion dieser Merkmale zusammengetragen.

Motivation

Die gesellschaftliche Bedeutung von Medien nimmt immer mehr zu: Bereits 2011 verfügten fast 90 % aller Haushalte über einen Computer, 2017 sind es 98 % (OECD, 2012, JIM-Studie, 2017). Fast alle Jugendlichen ab 14 Jahren verfügen über ein Smartphone (98 %, JIM-Studie, 2017) und die Möglichkeit, mobil das Internet zu nutzen (92 %, D21, 2016). Es kann also von einer Durchdringung der Gesellschaft mit digitalen Medien ausgegangen werden. Die KMK sieht vor diesem Hintergrund die Gesellschaft in einer „digitalen Revolution“, durch die nicht nur alte Arbeitsweisen abgelöst werden, sondern neue Perspektiven in unterschiedlichen Bereichen wie Gesellschaft, Wirtschaft und Wissenschaft eröffnet werden (KMK, 2016). Von Lehrkräften wird erwartet, dass sie mit „Medien und Medientechnologien kompetent und didaktisch reflektiert umgehen können“ und „Möglichkeiten und Grenzen eines anforderungs- und situationsgerechten Einsatzes von Medien im Unterricht“ kennen (KMK, 2004a; KMK, 2012, S. 7). Diese bildungspolitischen Forderungen werden ähnlich auch von Seiten der Medienpädagogik geäußert; so formuliert Tulodziecki als medienbezogene Kompetenzstandards für die Lehrerbildung unter anderem, dass Lehrkräfte „Unterrichts- oder Projektbeispiele mit Medienverwendung mit Bezug auf theoretische Ansätze entwerfen und hinsichtlich ihrer Lernvoraussetzungen, Zielvorstellungen, Lehrerhandlungen und Lernaktivitäten (einschließlich ihrer Inhalte, Sozialformen und Medien bzw. Erfahrungsformen) skizzieren“ können (Tulodziecki, 2012, S. 290). Es wird also erwartet, dass Lehrkräfte den zielgerichteten Einsatz von Medien im Unterricht reflektiert gestalten können (Blömeke, 2000). Die zugehörigen theoretischen Grundlagen müssen in der Lehreraus- und -weiterbildung vermittelt werden. In ihrer Arbeit geben Kammerl und Ostermann (2010) eine Übersicht über verschiedene Konzepte zur Medienbildung in allen drei Phasen der Lehrerbildung. Dabei zeigt sich, dass die Medienbildung meist nicht als verpflichtender, sondern als freiwilliger Teil im Sinne von zusätzlichen Zertifikaten oder Fortbildungen realisiert wird. Auch wenn die Ausbildungsrichtlinien gerade im Umbruch sind, wurden viele Lehrkräfte, die zurzeit im Dienst sind, auf der Grundlage ausgebildet. In Befragungen von Lehrkräften spiegelt sich diese Situation wieder, sodass Lehrkräfte angeben, sich den Großteil notwendiger Kenntnisse für digital basierten Unterricht privat angeeignet zu haben (89 %, forsa, 2014). Außerdem sehen sie einen Bedarf an Qualifizierungsangeboten für das Unterrichten mit digitalen Medien, wobei diese sowohl technische als auch fachdidaktische Bereiche betreffen (BITKOM, 2011; IQSH, 2015). Der Medienbegriff soll im Folgenden auf die für den Mathematikunterricht geltenden digitalen Mathematikwerkzeuge eingegrenzt werden, da diese aus fachdidaktischer Sicht von besonderem Interesse sind. Nichtdestotrotz ist natürlich insbesondere für die Planung von Medieneinsätzen im Fachunterricht auch ein weiterer Medienbegriff, der auch die Geräte (wie Tablet, PC usw.) umfasst, wichtig und notwendig. Dieser soll an jedoch in diesem Beitrag nicht betrachtet werden.

Theoretische Grundlagen

Die Forderungen nach Weiterbildungsmaßnahmen zum Einsatz von Medien unter Berücksichtigung theoretischer Ansätze wirft die Frage auf, auf welche theoretischen Ansätze für den Medieneinsatz im Mathematikunterricht zurückgegriffen werden kann. Neben dem Fach selbst und seiner Didaktik sind die Medienpädagogik und -didaktik relevante Bezugsdisziplinen für Medienentscheidungen im Fachunterricht. Wie auch die Pädagogik und die allgemeine Didaktik nehmen Medienpädagogik und -didaktik dabei eine übergeordnete Sicht auf unterrichtliche Kontexte ein. Als Kriterium für einen gelingenden Medieneinsatz sehen sie die Passung von Lernziel und Medieneinsatz (Petko, 2014). Es gilt also, die Kriterien der Passung von Lernziel und Medieneinsatz genauer zu beleuchten. Dafür müssen einerseits das Lernziel klar formuliert sein und andererseits der Medieneinsatz und seine Rolle im Lernprozess untersucht werden, was den Fachdidaktiken zugeschrieben wird (Petko, 2014).

Die daran anschließende Frage der Passung ist eine Frage, die eine qualitative Bewertung erfordert. Unterrichtliche Qualitätsmerkmale werden üblicherweise auf Oberflächen- (oder Sicht-) und Tiefenstrukturebene betrachtet (Kunter & Trautwein, 2013). Die Übertragung dieses Ansatzes zur theoriegeleiteten Reflektion kann ein erster Schritt zur Strukturierung von Merkmalen des Medieneinsatzes sein: Die Oberflächenstruktur beschreibt die Rahmenbedingungen eines Medieneinsatzes, während die Tiefenstruktur den Blick auf die zugrunde liegenden medial gestützten Lernprozesse ermöglicht.

Aus der frühen medienpädagogischen Forschung ist bekannt, dass der Blick auf das genutzte Medium allein noch nicht ausreichend für die Erklärung einer Wirkung ist (Kerres, 2003). Die Situation ist komplexer, denn jedes Medium bringt eine ganze Bandbreite unterschiedlicher Verwendungsmöglichkeiten mit sich, von denen dann eine im Unterricht realisiert wird. Hier bietet sich in Anlehnung an Angebot-Nutzungsmodelle eine Unterscheidung zwischen Eigenschaften des Mediums (Angebot) und Eigenschaften des Medieneinsatzes (Nutzung) an. Diese beiden theoretischen Bezugslinien werden im Weiteren zur Charakterisierung der Merkmale des Medieneinsatzes genutzt.

Charakterisierung der Merkmale von Medieneinsatz

Die differenzierte Charakterisierung eines Medieneinsatzes einerseits auf Tiefen- und Oberflächenstrukturebene und andererseits auf Ebene des Mediums und des Medieneinsatzes führt zu einer 2x2-Übersicht (s. Tab. 1). Diese Charakterisierung soll in Folgenden anhand eines Beispiels illustriert werden.

Lernziel: Die Lernenden können die Mittelsenkrechte einer Strecke mit Hilfe eines Dynamischen Geometrie-Systems (DGS) konstruieren. Sie können darüber hinaus Unterschiede zwischen verschiedenen Konstruktionswegen beschreiben und begründen, warum beide zur Mittelsenkrechten führen.

	Eigenschaften des Mediums (Was?)	Eigenschaften des Medieneinsatzes (Wie?)
Oberflächen-struktur	(A) Medienart	(C) Methodische Merkmale des Medieneinsatzes
Tiefenstruktur	(B) Potenzial des Mediums vor dem fachlichen Hintergrund	(D) Funktion des Mediums im fachlichen Lehr-Lern-Prozess

Tab. 1: Charakterisierung der Merkmale des Medieneinsatzes (nach Härtig, et al., 2018)

Die Lernziele zielen auf den Erwerb der Bedienkompetenz eines mathematischen Werkezugs (DGS) und sind damit der allgemeinen mathematischen Kompetenz „mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ (K5) zuzuordnen (KMK, 2004b). Darüber hinaus stellt die Lerngelegenheit eine produktive Übung dar, bei der die Eigenschaften der Mittelsenkrechten genutzt werden müssen, um unterschiedliche Konstruktionen zu begründen.

Skizze des Einsatzes: Den Schülerinnen und Schülern der 6. Klasse ist die Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke bereits bekannt. Die Standardkonstruktion der Mittelsenkrechten der Strecke AB wurde folgendermaßen eingeführt:

1. Kreis um A mit einem Radius r, der etwas größer als die Hälfte der Länge der Strecke AB ist.
2. Kreis mit gleichen Radius r um den Punkt B.
3. Die Schnittpunkte der Kreise durch eine Gerade verbinden.

Das DGS wurde in der Klasse bisher nur eingesetzt, um die grundlegenden Befehle (Erzeugen eines Punktes, einer Strecke, einer Gerade; Zirkel-Werkzeuge, Bewegen von Objekten) kennenzulernen. Die Lerngelegenheit setzt nach der Einführung der Befehle an. Die Lernenden sollen im DGS die Mittelsenkrechten einer Strecke AB auf zwei Weisen konstruieren: Zum einen gemäß der bekannten Konstruktion und zum anderen nach einer Konstruktionsanleitung, bei der der Radius gleich der Länge von AB ist. Im Anschluss soll die Strecke durch Ziehen verändert und die Auswirkungen beschrieben werden, wodurch beobachtet werden kann, dass die bekannte Konstruktion nur für $AB < r$ zielführend ist (vgl. Abb. 1). Die unterschiedlichen Konstruktionen sollen im Unterrichtsgespräch analysiert und begründet werden (Unterschiede beschreiben, Äquivalenz begründen, Vor- und Nachteile der Konstruktionen erläutern, z. B. ist mit Zirkel und Lineal der Platz auf dem Papier begrenzt, sodass man einen möglichst kleinen Radius wählt; beim DGS ist der Radius von der Strecke abhängig und somit die Konstruktion gegenüber Veränderungen im Zugmodus unempfindlich).

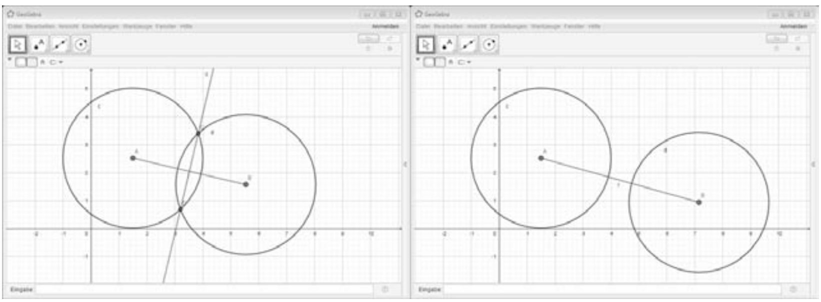


Abb. 1: Bruch der inhaltlichen Kohärenz bei der Konstruktion der Mittelsenkrechten durch die Standardkonstruktion mit einem DGS (hier mit dem Geometrie-Modul von GeoGebra)

Dieses Beispiel aus dem Bereich der ebenen Geometrie nutzt als Medienart (A) ein DGS (im Beispiel das Teilmodul aus dem umfangreicheren Programm GeoGebra), das den digitalen Medien zuzuordnen ist. Das DGS basiert auf der Zirkel-und-Lineal-Geometrie und ermöglicht die Konstruktion geometrischer Objekte. Das Potenzial des Mediums vor dem fachlichen Hintergrund (B) besteht darüber hinaus darin, dass durch den Zugmodus die geometrischen Objekte dynamisch variiert werden können. Im Gegensatz zu

Objekten auf Papier werden dadurch Abhängigkeiten von Objekten untereinander besonders deutlich, die in statischen Situationen nicht sichtbar sind. Die methodischen Merkmale des Medieneinsatzes (C) fassen die Rahmenbedingungen des speziellen Medieneinsatzes auf der Oberflächenebene zusammen. In diesem Fallbeispiel arbeiten die Lernenden in Einzelarbeit mit dem Medium, die Steuerung liegt ebenfalls in der Hand der Schülerinnen und Schüler. Die Funktion des Mediums im fachlichen Lehr-Lern-Prozess (D) ist im Fallbeispiel zum einen, dass das Medium als Unterrichtsgegenstands auftritt (Erlernen der Mittelsenkrechten-Konstruktion im DGS, Thematisieren der Unterschiede zwischen Konstruktionen im DGS und auf Papier). Gleichzeitig muss zum anderen in der Begründung der Konstruktionen begrifflich-inhaltlich mit der Mittelsenkrechten operiert werden, so dass das Medium auch als kognitives Werkzeug erscheint.

Theoretische Ansätze für die Merkmale von Medieneinsatz

Die vier vorgestellten Felder bieten eine Struktur, um sich der differenzierten Planung, Analyse und Reflexion eines Medieneinsatzes zu nähern. Im Folgenden sollen nun theoretische Elemente vorgestellt werden, die für die verschiedenen Felder relevant sind und zur theoretischen Unterfütterung der Merkmale von Medieneinsatz genutzt werden können.

Medienarten

Für die Analyse und Reflexion von Merkmalen von Medieneinsatz im Bereich der Medienarten sind zunächst Wissen über verschiedene, für den Mathematikunterricht relevante Medien notwendig (z. B. verfügbare Medien, Vorgaben der Rahmenlehrpläne der Länder). Darüber hinaus gehört neben der Beschreibung der unterschiedlichen Medienarten auch die Beschreibung oberflächlicher Merkmale und damit einhergehend eine Charakterisierung der Medien in Bezug auf die Medienarten. In Ihrer Übersicht über verschiedene Medientaxonomien weisen Heidt und Schwittmann (1976) auf die Nützlichkeiten und Grenzen solcher Taxonomien hin. Medientaxonomien sollen Lehrkräften die Entscheidung der Medienwahl erleichtern, indem sie Medien entsprechend ihrer Stimuli, angesprochener Kanäle, Funktion im Lernprozess usw. charakterisieren (vgl. Heidt & Schwittmann, 1976).

Ein Beispiel für eine mathematikdidaktische Charakterisierung ist die Einteilung in Anschauungsmittel, Arbeitsmittel und Werkzeuge von Schmidt-Thieme und Weigand (2015). Medien, auf die Nutzende keine Einwirkungsmöglichkeit haben fallen in die Kategorie der Anschauungsmittel, während Arbeitsmittel und Werkzeuge als besondere Arbeitsmittel mathematische Objekte repräsentieren und Handlungen oder Operationen mit diesen Objekten erlauben. Werkzeuge besitzen einen vielfältigeren Anwendungsbereich als Arbeitsmittel im Allgemeinen (Schmidt-Thieme & Weigand, 2015).

Potenzial des Mediums vor dem fachlichen Hintergrund

Die Analyse des Potenzials eines Mediums vor dem fachlichen Hintergrund bezieht sich auf den fachlichen Gehalt. Ziel ist also die Bandbreite der Möglichkeiten, die ein Medium bietet, zu beschreiben und in Beziehung zum Lerngegenstand zu setzen. Dabei gibt es zwei Wege, sich der Beschreibung dieser Potenziale zu nähern: Vom Fachinhalt oder vom Medium aus. In der Praxis bietet es sich an, beide Analyserichtungen zu kombinieren.

Eine Betrachtung vom Medium aus bietet sich etwa an, wenn die verbindliche Nutzung vorgesehen ist. Die Analyse des Mediums offenbart dann die gesamte Bandbreite an Einsatzzwecken, die damit bedient werden können. Die Frage, die sich in diesem Fall stellt ist also, welche Lernziele mit diesem Medium prinzipiell adressiert werden können. In Ihrer Expertise beschreibt Barzel (2012) beispielsweise ausführlich die Möglichkeiten und Einschränkungen, die ein CAS zu bieten hat.

Vom mathematischen Inhalt ausgehend ist die Überlegung eine etwas andere. Hier stellt sich die Frage, inwiefern sich ein mathematischer Inhalt mit Hilfe eines Mediums erschließen lässt bzw. welche Medien sich eignen, um diesen Inhalt zu vermitteln. Zum Beispiel untersucht Vogel (2014), wie das Modellieren von Daten durch Funktionen mit Hilfe digitaler Medien und insbesondere multimedialer Repräsentationen unterstützt werden kann. Fokussiert wird also, mit welchem Medium ein Lernziel besonders gut adressiert werden kann.

Methodische Merkmale des Medieneinsatzes

Die Analyse des Medieneinsatzes in Bezug auf Oberflächenstrukturmerkmale erfordert die Beschreibung der methodischen Merkmale des Medieneinsatzes. Maßgeblich für diese Beschreibung sind die Rahmenbedingungen des Einsatzes. Dazu zählen insbesondere allgemeine pädagogische Aspekte wie die Steuerung des Mediums, aber auch, inwiefern ggf. die Rahmenbedingungen zu fachunspezifischen pädagogischen Zielsetzungen (z. B. Förderung kollaborativen Arbeitens) passen. Dieses Merkmal wird also vorwiegend durch fachunspezifische Aspekte bestimmt und greift entsprechend auf Charakterisierungen aus der allgemeinen Pädagogik und Medienpädagogik zurück. Dazu zählen beispielsweise die Beschreibung der genutzten Methoden und Sozialformen oder die Darlegung der Anforderungen in Bezug auf Kollaboration und Selbststeuerung (Kunter & Trautwein, 2013; Tulodziecki, 2006).

Für Fragen des Medieneinsatzes im Fach ist eine Charakterisierung der Rahmenbedingungen notwendig, da fachliche Lernprozesse erst vor diesem Hintergrund reflektiert werden können. Gerade für Medieneinsatz ergeben sich zudem teilweise erhöhte Anforderungen an die Lernenden, wie am Beispiel der Selbstregulation gezeigt werden soll. Untersuchungen zeigen, dass insbesondere schwächere Lernende Schwierigkeiten haben, den zusätzlichen Anforderungen auf organisatorischer Ebene, die häufig beim Einsatz von Medien entstehen, gerecht zu werden (Schulz-Zander & Preussler, 2005). Insofern müssen solche Merkmale bei der Planung und Analyse von Medieneinsatz berücksichtigt werden.

Funktion des Mediums im fachlichen Lernprozess

Die Charakterisierung eines Medieneinsatzes auf der Tiefenstrukturebene nimmt in den Blick, welche Rolle ein Medium im fachlichen Lehr-Lernprozess übernimmt (vgl. zu Funktionen von Medien im Lernprozess auch Schwanewedel et al., 2018). Dabei lassen sich zwei grundlegende Kategorien unterscheiden: Zum einen kann das Medium selbst Unterrichtsgegenstand sein. Dies ist oft der Fall, wenn im Umgang mit Medien die Bedienkompetenz verbessert wird oder wenn explizit über die dem Medium zugrunde liegenden Funktionsweisen gesprochen wird. Das Spektrum der

Funktionsweise reicht dabei vom Lernen der Bedienung eines Mediums (vgl. oben das Beispiel zur Mittelsenkrechten) bis hin zu zugrunde liegenden Algorithmen (bspw. wie bestimmt ein normaler Taschenrechner bzw. ein CAS die Wurzel von 4?). Zum anderen kann ein Medium statt als Unterrichtsgegenstand als Unterrichtsmittel eingesetzt werden, um ein Lernziel zu erreichen. Letzteres wird auch als instrumentelle Sicht auf Medien bezeichnet (Kerres, 2000).

Im Speziellen erscheinen Unterrichtsmittel im Mathematikunterricht häufig unter dem Aspekt der Auslagerung, indem die Durchführung mathematischer Prozesse durch das Gerät übernommen wird (Peschek, 1999). Das Gerät ist dann ein Hilfsmittel, so dass Lernende Teilprobleme effizienter lösen können. Bei der Nutzung von Taschenrechnern und CAS kommt das Auslagerungsprinzip häufig zum Einsatz, wenn mathematische Rechenoperationen als „Black Boxes" von dem Gerät übernommen werden und so z. B. realistischere Modellierungsaufgaben bearbeitet werden können. Als weiteres Beispiel können explorativen Phasen dienen, in denen mit Hilfe von Werkzeugen schnell viele Beispiele generiert und systematischen Variationen unterworfen werden können, um mathematische Zusammenhänge zu untersuchen (z. B. Winkelsätze im Kreis).

Zur Beschreibung der Merkmale des Medieneinsatzes lassen sich auch Kompetenzmodelle heranziehen, die als Synthese aus Bedienkompetenz und fachlich-inhaltlichen Kompetenzen beschreiben, welche Anforderungen Lernende mit den Medien zu bewältigen haben. Beispielsweise haben Weigand und Bichler (2010) ein solches Kompetenzmodell zur Beschreibung der Nutzung von CAS im Inhaltsbereich funktionaler Zusammenhänge vorgelegt, bei dem höhere Kompetenzstufen durch die zunehmende Integration von fachlich-inhaltlichen Kompetenzen mit Bedienkompetenzen ausgezeichnet sind. Solche Modelle ermöglichen die differenzierte Betrachtung der fachlichen Aspekte der Mediennutzung für spezifische Lernziele. Sie berücksichtigen dabei, dass in der Unterrichtspraxis die doppelte Sichtweise auf Medien als Unterrichtsgegenstand und Unterrichtsmittel sich wenig trennscharf abbildet. Da medienbezogene Kompetenzen sich aber sowohl aus Bedien- als auch Benutzungskompetenzen speisen, ist die Berücksichtigung beider Dimensionen Kennzeichen einer reflektierten Sicht auf Unterricht mit Medien (vgl. Mühling et al., 2018).

Zusammenfassung

Eine kriteriengeleitete Planung und Reflexion des Medieneinsatzes wie Blömeke (2000) sie fordert, ist nur unter Rückgriff auf theoretische Ansätze möglich. Von Seiten der Lehrkräfte bestehen Forderungen nach Qualifizierungsangeboten in diesem Bereich, wobei bisher kein Konsens vorliegt, auf welche Theorieelemente sich diese beziehen sollen. In dem Beitrag wurde vorgeschlagen, Medieneinsatz im Fachunterricht mit der Perspektive auf Sicht- und Tiefenstrukturmerkmale der Medien einerseits und des spezifischen Einsatzes andrerseits zu betrachten. Zudem wurde entlang dieser Charakterisierung ein erster Vorschlag erarbeitet, welche Theorieelemente berücksichtigt werden sollen. Diese Trennung der Merkmale von Medieneinsatz mag zunächst künstlich erscheinen, wird sie jedoch nicht vorgenommen, kann der Blick auf wichtige Merkmale und Zusammenhänge verstellt werden und so Möglichkeiten einer elaborierten Planung und Analyse von Medieneinsatz im Weg stehen. In der weiteren Arbeit des Projekts „MiU – Medieneinsatz im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht“ soll darauf aufbauend eine Fortbildung für Lehrkräfte entwickelt werden. Langfristiges Ziel ist dabei, im Diskurs auszuhandeln, was als Korpus der relevanten theoretische Grundlagen für den Medieneinsatz im Fachunterricht – auch über Phasen der Lehrerbildung hinweg – gelten kann.

Dieser Beitrag ist im Rahmen des Projekts „MiU – Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht“ entstanden, welches von der Joachim Herz Stiftung gefördert wird.

Literatur

Barzel, B. (2012). Computeralgebra im Mathematikunterricht. Ein Mehrwert – aber wann?. Waxmann Verlag: Münster.

BITKOM (2011). Schule 2.0. Eine repräsentative Untersuchung zu Einsatz elektronischer Medien an Schulen aus Lehrersicht. Verfügbar unter: https://www.bitkom.org/noindex/Publikationen/2011/Studie/Studie-Schule-2-0/BITKOM-Publikation-Schule-20.pdf [27.11.17]

Blömeke, S. (2000). Medienpädagogische Kompetenz. Theoretische und empirische Fundierung eines zentralen Elements der Lehrerausbildung. München: KoPäd.

forsa (2014). IT an Schulen. Ergebnisse einer Repräsentativbefragung von Lehrern in Deutschland. Berlin: forsa.

Härtig, H., Kampschulte, L., Lindmeier, A., Ostermann, A., Ropohl, M. & Schwanewedel, J. (2018). Wie lässt sich Medieneinsatz im Fachunterricht beschreiben? In Ropohl, M., Lindmeier, A., Härtig, H., Kampschulte, L., Mühling, A. & Schwanewedel, J. (Hrsg.). Medieneinsatz im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Fächerübergreifende Perspektiven auf zentrale Fragestellungen. Hamburg: Joachim Herz Stiftung Verlag, 157-192.

Heidt, E., & Schwittmann, D. (1976). Medientaxonomien: Ein kritischer Überblick. In L. J. Issing & Knigge-Illner, H. (Hrsg.): Unterrichtstechnologie und Mediendidaktik. Weinheim/Basel: Beltz, 123-140.

Initiative D21 (2016). Sonderstudie „Schule Digital“. Lehrwelt, Lernwelt, Lebenswelt: Digitale Bildung im Dreieck SchülerInnen–Eltern–Lehrkräfte. O. O.: Kantar TNS. Verfügbar unter: http://initiatived21.de/app/uploads/2017/01/d21_schule_digital2016.pdf [13.10.17].

Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein (2015). Landesweite Umfrage zur IT-Ausstattung und Medienbildung der Schulen in Schleswig-Holstein. Kronshagen: IQSH.

Kammerl, R. & Ostermann, S.(2010). Medienbildung – (k)ein Unterrichtsfach? Eine Expertise zum Stellenwert der Medienkompetenzförderung in Schulen. MA HSH: Norderstedt.

Kerres, M. (2000). Medienentscheidungen in der Unterrichtsplanung. Zu Wirkungsargumenten und Begründungen des didaktischen Einsatzes digitaler Medien. Bildung und Erziehung, 53, 19-39.

Kerres, M. (2003). Wirkungen und Wirksamkeit neuer Medien in der Bildung. In Education Quality Forum. Wirkungen und Wirksamkeit neuer Medien. Münster: Waxmann, 31-44.

KMK (2004a). Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.12.2004. Bonn: KMK.

KMK (2004b). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. München, Neuwied: Wolters Kluwer Deutschland.

KMK (2012). Medienbildung in der Schule. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 08.03.2012. Bonn: KMK.

KMK (2016). Strategie der Kultusministerkonferenz „Bildung in der digitalen Welt“. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 8.12.2016. Bonn: KMK.

Kunter, M. & Trautwein, U. (2013). Psychologie des Unterrichts. Paderborn: Schöningh.

Medienpädagogischer Forschungsverbund Südwest (2017). JIM-Studie 2017. Jugend, Information,(Multi-) Media. Basisstudie zum Medienumgang 12-bis 19-Jähriger. Verfügbar unter: https://www.mpfs.de/fileadmin/files/Studien/JIM/2017/JIM_2017.pdf [30.11.17]

Mühling, A. & Allert, H. (2018). Chancen und Herausforderungen beim Einsatz von Medien aus Sicht der Lernenden. In Ropohl, M., Lindmeier, A., Härtig, H., Kampschulte, L., Mühling, A. & Schwanewedel, J. (Hrsg.). Medieneinsatz im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Fächerübergreifende Perspektiven auf zentrale Fragestellungen. Hamburg: Joachim Herz Stiftung Verlag, 38-54.

OECD (2012). Key ICT Indicators. Households with access to a home computer. Datensatz. Verfügbar unter: http://www.oecd.org/sti/broadband/oecdkeyictindicators.htm [27.12.17]

Peschek, W. (1999): Mathematische Bildung meint auch Verzicht auf Wissen. In Kadunz, G., Ossimitz, G., Peschek, W., Schneider, E. & Winkelmann, B. (Hrsg.): Mathematische Bildung und neue Technologien. Stuttgart-Leipzig: Teubner, 263-270.

Petko, D. (2014). Einführung in die Mediendidaktik. Lehren und Lernen mit neuen Medien. Weinheim: Beltz.

Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (2015). Medien. In Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.). Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 461-490.

Schulz-Zander, R. & Preussler, A. (2005). Selbstreguliertes und kooperatives Lernen mit digitalen Medien. In Bachmeier, B., Dipold, P. & de Witt, C. (Hrsg.) Jahrbuch Medienpädagogik 4. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften, 211-228.

Schwanewedel, J., Ostermann, A. & Weigand, H.-G. (2018). Medien sind gut! Gut für was? In Ropohl, M., Lindmeier, A., Härtig, H., Kampschulte, L., Mühling, A. & Schwanewedel, J. (Hrsg.). Medieneinsatz im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Fächerübergreifende Perspektiven auf zentrale Fragestellungen. Hamburg: Joachim Herz Stiftung Verlag, 14-37.

Tulodzeicki, G. (2006). Funktionen von Medien. In Arnold, K.-H., Sandfuchs, U. & Wiechmann, J. (Hrsg.). Handbuch Unterricht. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, 387-295.

Tulodziecki, G. (2012). Medienpädagogische Kompetenz du Standards in der Lehrerbildung. In Schulz-Zander, R. et al. (Hrsg.). Jahrbuch Medienpädagogik 9, Wiesbaden: Springer, 271-297.

Vogel, M. (2014). Visualisieren–Explorieren–Strukturieren: Multimediale Unterstützung beim Modellieren von Daten durch Funktionen. In Wassong, T., Frischemeier, D., P. Fischer, P. R., Hochmuth, R. & Bender, P. (Hrsg.). Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen–Using Tools for Learning Mathematics and Statistics (S. 97-111).

Zur Rolle von Grundbegriffen in der Forschung zum digitalen Lernen

Florian Schacht

Im vorliegenden Beitrag erfolgt eine kritische Auseinandersetzung mit zwei zentralen Begriffen aus mathematikdidaktischen Forschungszusammenhängen, die bei der Arbeit mit digitalen Werkzeugen eine Rolle spielen: das Digitale und die Technik. Nach einer begriffsphilosophischen Diskussion nach Heidegger (1953) und Galloway (2014) wird vor dem Hintergrund ausgewählter Forschungsdesiderata die Notwendigkeit einer Identifizierung und Ausschärfung von Grundbegriffen zum sog. digitalen Lernen begründet.

Einleitung

Auf nahezu jeden gesellschaftlichen Teilbereich scheint sich die sog. Digitalisierung massiv auszuwirken: die Transformation der Institution Schule, des Lernbegriffs, sozialer Umgangsformen sowie des Gesellschaftsbegriffs (‚digitale Wissensgesellschaft') an sich. Auch in der bildungspolitischen und in der wissenschaftlichen Diskussion wird dem sog. digitalen Zeitalter eine nicht zu unterschätzende Bedeutung auf den Wandel von Lernformen und Lernprozessen zugesprochen. Gleichzeitig fällt auf, dass einige selbstverständlich genutzte Grundbegriffe z. T. sehr unterschiedlich verwendet werden. Im vorliegenden Text sollen die folgenden zwei Begriffe entlang begriffsphilosophischer Zugänge genauer untersucht werden: Zunächst wird der Begriff der Technik und anschließend der Begriff des Digitalen thematisiert. Dazu werden jeweils zwei Standpunkte eingenommen, die sich jeweils auf philosophische Ansätze nach Heidegger (1953) bzw. Galloway (2014) beziehen. Darauf aufbauend werden Potentiale und Grenzen des Begriffsverständnisses für die mathematikdidaktische Forschung diskutiert. Schließlich soll eine Diskussion über werkzeugbezogene Grundbegriffe begründet werden.

Der ontologische Blick: Rolle der Grundbegriffe

In diesem Abschnitt werden zwei Begriffe genauer betrachtet, nämlich der der Technik und der des Digitalen. Beide Begriffe prägen aktuelle bildungspolitische Diskurse in entscheidender Weise (KMK, 2016; BMBF, 2016). Eine philosophische Betrachtung wird zeigen, dass umgangssprachliche Verständnisse nur einige Facetten des Begriffsumfangs darstellen. Außerdem lassen sich vor dem Hintergrund der Diskussion wichtige Fragen für den Mathematikunterricht formulieren.

Perspektiven auf den Technikbegriff

Der Begriff der Technik ist in umgangssprachlichen Kontexten sehr präsent. Die folgenden Verwendungsweisen zeigen einige Beispiele des Begriffs der Technik aus dem Kontext Werbung:

- Technik, die begeistert. (OPEL)
- Vorsprung durch Technik (Audi)
- Abgenickt von Tech-Nick - Saturn, 2014
- Soo! muss Technik! - Saturn, 2011
- Wir lieben Technik. Wir hassen teuer, Saturn, 2007
- Technik fürs Leben (BOSCH)

Auf die Frage, was Technik ist, ließe sich vor dem Hintergrund der Beispiele oben zunächst etwa mit instrumentellen Begriffen so antworten, dass sich Technik für bestimmte Dinge oder Handlungen nutzen lässt. In diesem Sinne ist Technik nützlich: Man nutzt sie zum Fahren (Auto), zum Rechnen (Taschenrechner) oder zum Entdecken mathematischer Zusammenhänge oder zum Bilden von Hypothesen (CAS, DGS etc.).

In seinem Aufsatz über Die Frage nach der Technik hebt Heidegger (1953) hervor, dass es eine gängige Vorstellung sei, Technik als Mittel zum Zweck des Menschen zu betrachten und dass darin eine instrumentale und anthropologische Bestimmung dieses Begriffs zum Ausdruck komme. Heidegger wendet jedoch ein: „Die richtige instrumentale Bestimmung der Technik zeigt uns [...] noch nicht ihr Wesen“ (Heidegger, 1953, S. 9). Er begründet vielmehr die folgende These: „Die Technik ist also nicht bloß ein Mittel. Die Technik ist eine Weise des Entbergens“ (Heidegger, 1953, S. 13). Unter dem Vorgang des Entbergens versteht Heidegger einen Prozess des Hervorbringens, etwa von Rohstoffen, Erkenntnissen oder Ergebnissen eines Experiments: „Das Entscheidende der τέχνη liegt somit keineswegs im Machen und Hantieren, nicht im Verwenden von Mitteln, sondern in dem genannten Entbergen. Als dieses (...) ist τέχνη ein Her-vor-bringen“ (Heidegger, 1953, S. 14). Heidegger selbst verweist etwa auf ein Beispiel aus der Physik, die die Welt „als einen vorausberechenbaren Zusammenhang von Kräften“ (ebd., 1953, S. 22) konzeptualisiert. Das Experiment schließlich dient „zur Befragung (der Natur, F.S.), ob sich die so gestellte Natur und wie sie sich meldet“ (ebd., 1953, S. 22). Für Heidegger verdeutlicht dieses Beispiel die Besonderheit des Technikbegriffs jenseits eines anthropologischen und instrumentalen Begriffsverständnisses: “Solange wir die Technik als Instrument vorstellen, bleiben wir im Willen hängen, sie zu meistern. Wir treiben am Wesen der Technik vorbei“ (ebd., 1953, S. 33). Hischer (2016) verweist dabei noch auf die wichtige Unterscheidung von Technik und Technologie: „Es wäre von Technik zu sprechen, wenn etwa nur die Verfahrens- und Funktionsweisen gemeint sind, von Technologie hingegen, wenn die verantwortete Technikgestaltung (früher oft noch „Technikfolgenabschätzung“ genannt) davon nicht losgelöst wird“ (Hischer, 2016, S. 32).

Überträgt man den Gedanken Heideggers, dass Technik weniger ein Mittel zum Zweck ist, auf den Mathematikunterricht, so ergeben sich interessante und – angesichts der realisierbaren Möglichkeiten der Nutzung von Medien im Mathematikunterricht – hochaktuelle Fragen:

- Inwiefern bietet eine DGS die Möglichkeit, die Mathematik zu befragen (im Sinne Heideggers (1953, S. 22), um Erkenntnis hervorzubringen?
- Inwiefern schöpfen wir das Potential eines CAS als technisches Medium aus, wenn wir es schwerpunktmäßig als Rechenknecht verwenden?

Diese Fragen sollen hier nicht beantwortet werden, sie stellen vielmehr Bezüge zu fachdidaktisch nach wie vor relevanten Fragestellungen dar.

An dieser Stelle sei deutlich angemerkt, dass Heidegger in der Konsequenz der Technik äußerst skeptisch gegenübersteht und dass der Autor dieses Textes diese Konsequenz nicht teilt. Unabhängig davon aber, inwiefern man geneigt ist, Heidegger in seiner Analyse zu folgen, so deutet er (1953) in seinem Aufsatz eine Perspektive auf den Aspekt des Entbergens auf den Technikbegriff an, die für den Mathematikunterricht nach wie vor aktuell erscheint und die sich mit den explorativen Möglichkeiten der Techniknutzung im Mathematikunterricht verträgt.

Neben dem Technik-Begriff soll im Folgenden noch ein zweiter sehr relevanter Begriff diskutiert werden: der des Digitalen. In den nächsten Abschnitten wird anschließend entlang ausgewählter Forschungsdesiderata verdeutlicht, wie die beiden Begriffe z. T. genutzt werden und inwiefern sich daraus eine Notwendigkeit für die Diskussion über die Rolle und Verwendung von (werkzeugbezogenen) Grundbegriffen ergibt.

Perspektive auf den Begriff des Digitalen

Auch der Begriff des Digitalen ist gesellschaftlich hoch relevant. So wird wie selbstverständlich vom digitalen Wandel gesprochen, von sog. digital natives, von Digitalpakten oder von digitalen Werkzeugen. Schon diese Beispiele machen deutlich, dass die umgangssprachliche Verwendung des Attributs digital von ganz unterschiedlicher Qualität sein kann. So stellt sich etwa die Frage, ob eine Person (als digital native) in gleicher Weise digital ist wie es etwa ein Werkzeug sein kann oder ein Pakt. Auch wenn man den hier genannten Beispielen sicher zugestehen muss, dass ihre Verwendung z. T. durchaus umgangssprachlich ist und keine scharf umrissenen Begriffsdefinitionen vorliegen, so werfen sie zumindest die Frage auf, was das Digitale ausmacht. Gleichzeitig ergibt sich daraus die Anforderung an wissenschaftliche Diskurse, eine präzise Klärung des Begriffs des Digitalen vorzunehmen, insbesondere wenn dieser Begriff im Zentrum wissenschaftlicher Aktivitäten steht, wie etwa bei der Frage nach der Nutzung digitaler Werkzeuge oder digitaler Bildung.

Der zeitgenössische Philosoph Alexander Galloway beschäftigt sich intensiv mit der Frage nach der Begriffsklärung des Digitalen. Die philosophische Begriffsklärung kommt dabei zunächst nahezu vollständig ohne Verweis auf Computer oder sonstige neue Medien aus. In seiner philosophischen Auseinandersetzung mit dem französischen Philosophen Laruelle entwickelt Galloway eine Perspektive auf das Digitale, die in der Dialektik nach Hegel verortet ist. Dabei entwickelt Galloway die These, dass der Begriff des Digitalen für die Philosophie an sich von zentraler Bedeutung ist: Could „it be possible that philosophy and digitality are the same thing?“ (Galloway, 2014, S. xix) Für Galloway (2014) sind digitale Prozesse “the making-discrete of the hitherto fluid, the hitherto whole, the hitherto integral. […] Any process that produces or maintains identity differences between two or more elements can be labeled digital.” (Galloway (2014), S. 52). Ein Digitalisierungsprozess wird mithin abstrakt als Diskretisierungsprozess verstanden, als ein Prozess, der Differenz erzeugt. Aus diesem Verständnis heraus begründet Galloway die zentrale Rolle, die das Digitale in der und für die Philosophie überhaupt spielt: Wann immer über die Welt reflektiert wird, ergibt sich eine Differenz zwischen der philosophierenden Person und der Welt. In diesem Sinne ist Philosophie – ebenso wie das Digitale – „rooted in distinction“ (Galloway, 2014, S. xix). Weiter heißt es bei Galloway: “The digital is the capacity to divide things and make distinctions between them. Thus not so much zero and one, but one and two” (Galloway, 2014, S. xxix). In diesem Sinne ist für Galloway das Digitale ein Archetyp philosophischen Denkens überhaupt. Mit Blick auf Hegels Dialektik ist dabei das Digitale ein „Moment der Analyse, in dem das Eine in zwei zerfällt“ (Galloway, 2014, p. xxix, Übersetzung: F. Schacht).

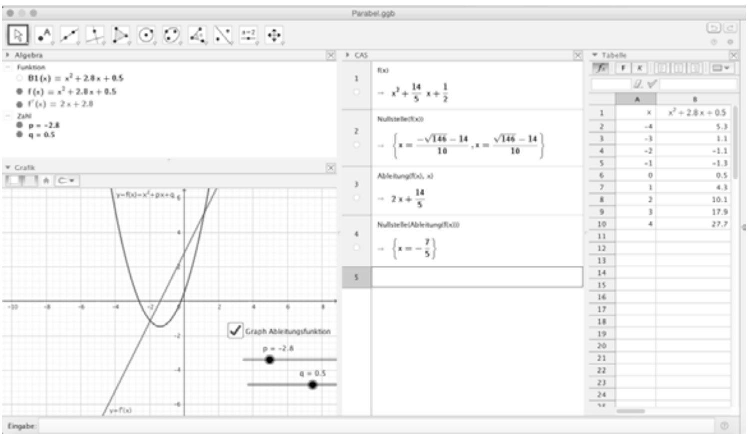


Abb. 1: Der Funktionsbegriff „zerfällt“ auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen. Ein solches digitales Werkzeug ermöglicht einen Zugang zu mathematischen Begriffen über unterschiedliche Repräsentationsformen.

Der vorliegende Text hat nicht den Anspruch, dieses Verständnis systematisch für die Klärung des Begriffs des digitalen Werkzeugs zu nutzen. Es seien hier aber dennoch einige Parallelen aufgezeigt, die eine interessante Neubetrachtung des Verständnisses digitaler Werkzeuge eröffnen. So ermöglichen etwa Multirepräsentationswerkzeuge einen Zugang zu mathematischen Zusammenhängen über unterschiedliche Repräsentationsformen, wie etwa Abbildung 1 zeigt. Was hier als (funktionaler) quadratischer Zusammenhang erscheint, wird sowohl tabellarisch als auch graphisch oder algebraisch über einen entsprechenden Funktionsterm dargestellt. Der quadratische Zusammenhang wird hier also auf unterschiedliche Art und Weise dargestellt. Die Lernenden erfahren diesen Zusammenhang aber nicht nur aus der reinen Rezeption der jeweiligen Darstellungsform, sondern idealerweise aus der Verknüpfung, aus dem Abgleich und aus der Beurteilung der unterschiedlichen Darstellungen. Es ist ein wesentliches Charakteristikum solcher Multirepräsentationswerkzeuge, dass die unterschiedlichen Darstellungsformen miteinander in Beziehung stehen und diese Beziehungen auch aufgezeigt werden, während sie sich hinsichtlich des Zugangs stark unterscheiden und jeweils über spezifische Vor- und Nachteile verfügen. Im Herstellen von Beziehungen zwischen den unterschiedlichen Repräsentationsebenen erfahren die Lernenden ebenjene Differenz im Sinne Galloways (2014), die durch das Werkzeug überhaupt erst ermöglicht wird. In diesem Sinne erscheint ein solches Multirepräsentationswerkzeug als ein digitales Werkzeug. Digitale Werkzeuge erscheinen daher als Hilfsmittel, die unterschiedliche begriffliche Aspekte zusammenbringen bzw. die eine begriffliche Differenz möglich machen. Auch etwa Möglichkeiten der Nutzung von Augmented Reality erscheinen als digital, wenn sie etwa zu realen Darstellungen zusätzliche (z.B. ikonische, tabellarische oder symbolische) Ebenen anbieten, um die entsprechenden mathematischen Konzepte zu erfassen.

Demgegenüber wäre etwa ein Zirkel, mit dem das Bild eines Kreises visualisiert werden kann, kein digitales Werkzeug im Sinne des obigen Verständnisses. Zwar lässt sich mit Hilfe des Zirkels ein Bild des (theoretischen) mathematischen Begriffs des Kreises erzeugen, aber der Zirkel selbst ermöglicht es eben auch nur, diese eine (nämlich ikonische)

Repräsentation eines Kreises zu erstellen. Mit Hilfe des Zirkels ist es demnach möglich, eine Repräsentation des Kreises zu erstellen, aber ein digitales Werkzeug in differenzbezogener Perspektive, in der durch die Nutzung des Werkzeugs unterschiedliche Begriffsfacetten erzeugt werden können, ist der Zirkel somit nicht.

Hier ergibt sich ein entsprechender Forschungsbedarf für eine systematische Betrachtung unterschiedlicher Werkzeuge hinsichtlich der Frage, inwiefern sie als digitale Werkzeuge im Sinne Galloways (2014) betrachtet werden können. Dabei muss auch etwa die Herstellung von Differenz und die Diskretisierung des vormals Ganzen, bei der Unterschiede zwischen zwei Elementen erzeugt werden, nicht notwendigerweise auf die Repräsentationsebenen beschränkt sein.

Eine Anwendung dieses Verständnisses auf sprachliche Prozesse im Mathematikunterricht findet sich u. a. in Schacht (2017). Dort wird Galloways Verständnis des Digitalen für die Untersuchung sprachlicher Prozesse genutzt. So konnte bisher herausgearbeitet werden, dass sich die Sprache der Lernenden bei der Arbeit mit digitalen Werkzeugen verändert, insofern eine werkzeugbezogene Sprache genutzt wird, die vielfach auf Merkmale und sprachliche Besonderheiten des Werkzeugs zurückgreift (vgl. dazu etwa auch Schacht 2015a, 2015b, Weigand 2013, Ball et al. 2005). Galloways Fundierung des Begriffs des Digitalen wird nun für die Analyse sprachlicher Prozesse adaptiert: Ein Diskurs wird dabei als digital bezeichnet, wenn er Unterschiede zwischen zwei oder mehr Elementen erzeugt oder aufrechterhält. So zeigen etwa empirische Beispiele unterschiedliche Varianten digitaler Diskurse auf (Schacht, 2017). In einer Variante digitaler Diskurse etwa kann die werkzeugbezogene Sprache Lernenden helfen, sprachliche Angebote (des digitalen Werkzeugs) zu nutzen, um (mathematisch falsche) umgangssprachliche Wendungen zugunsten fachsprachlich korrekter Ausdrücke zu ersetzen (lineare digitale Diskurse). In rekonstruierten empirischen Beispielen konnte so herausgearbeitet werden, inwiefern im Diskurs zwischen unterschiedlichen sprachlichen Ebenen (in Form der entsprechenden sprachlichen Register Umgangssprache, Fachsprache und Werkzeugsprache) vermittelt wurde, indem die sprachlichen Ressourcen des digitalen Werkzeugs genutzt wurden. In einer zweiten Variante wurden diese Unterschiede zwar auch ermittelt, aber es gelang den Lernenden letzthin nicht, zwischen den unterschiedlichen sprachlichen Ebenen zu vermitteln. In diesem Fall wird von divergenten digitalen Diskursen gesprochen. Das Werkzeug ist daher in beiden Fällen sprachlicher Impulsgeber für die Erzeugung unterschiedlicher sprachlicher Ebenen im Diskurs, weshalb es sich vor dem Hintergrund des obigen Verständnisses um einen digitalen Diskurs handelt.

Nachdem hier nun das Verständnis des Digitalen auf der Grundlage eines philosophischen Zugangs nach Galloway (2014) diskutiert wurde, sollen im nächsten Abschnitt anhand ausgewählter Beispiele die Begriffsverwendung in mathematikdidaktischen Forschungszusammenhängen diskutiert werden.

Der forschungsbezogene Blick: Diversität der Forschungsgegenstände

Die folgenden Beispiele sollen zunächst aufzeigen, inwiefern die Begriffe des Digitalen und der Technik in ausgewählten Forschungszusammenhängen verwendet werden. Es wird jeweils das zugrundeliegende Begriffsverständnis diskutiert. Neben den hier diskutierten Beispielen sei an dieser Stelle auf eigene Arbeiten verwiesen (vgl. Schacht 2015a, 2015b, 2017), bei denen auf die oben genannten Grundlagen nach Galloway (2014) Bezug genommen wird und bei denen insbesondere sprachliche Prozesse bei der Arbeit mit digitalen Werkzeugen genauer untersucht werden.

Beispiel 1: Digital Technology

In seinem Vorwort zur Sammlung von Forschungsbeiträgen zu mathematikbezogenen Lehrerfortbildungen mit dem Titel The mathematics teacher in the digital era hebt Pimm (2014) die herausgehobene Rolle digitaler Werkzeuge hervor:

> *„technology actually refers to devices, to stuff – stuff into which mathematical and other know-how has been stuffed. Now we have ‘digital’ as the widespread preferred adjective, including ‘digital technology’, superseding ‘new technology’ or ‘information technology’ (to me one of the least informative) or ‘information and communication technology’. What is being signalled by this plurality of and rapid drift in naming – for change of terminology is seldom either neutral or innocent?“ (Pimm, 2014, S. X, Hervorhebung F.S.)*

Zunächst betont Pimm (2014) hier, dass Technologie auf Geräte (devices) bzw. Zeug (stuff) verweise. In diesem Kontext hebt Pimm (2014) hervor, dass das Adjektiv digital den Begriff des Neuen ersetzt habe, sodass man nunmehr von digitaler Technologie statt von neuer Technologie spricht. Nicht näher spezifiziert ist die genaue Bedeutung des Digitalen im Zusammenhang des Buchtitels, der von der „digitalen Ära“ spricht (Clark-Wilson et al., 2014).

Dieses kurze Zitat macht deutlich, inwiefern der zugrundeliegende Technologiebegriff sich auf ein eher instrumentales Verständnis bezieht. Gleichzeitig wird angedeutet, dass das Adjektiv digital im Sinne des Neuen verwendet wird. An dieser Stelle soll keine inhaltliche Wertung vorgenommen werden, es zeigen sich aber zunächst einmal Unterschiede zu den oben diskutierten Begriffsverständnissen. Die Abgrenzung zu den weiteren Beispielen wird deutlich machen, inwiefern sich die Begriffsverwendungen z. T. stark unterscheiden.

Beispiel 2: Digital Learning

Im zweiten Beispiel wird die Begriffsverwendung des sog. digitalen Lernens diskutiert. Auf der Website Mathematics education in the digital age der NCTM wird das folgende Verständnis von digital learning angeboten:

- „Students are using technology and carefully-chosen websites to gather authentic data, engage with dynamic math models, and communicate their understanding of the world in mathematical terms.
- Students who are struggling with a topic are able to analyze their own performance data, choose from a variety of presentations and enabling technologies, and overcome their barriers as they engage with mathematics.
- School leaders are integrating and matching the right technology tools (labs, carts, tablets, graphing calculators, etc.) with appropriate learning targets.
- Students are collaborating and growing through web-based learning communities.“ (NCTM, 2015)

Ohne im Detail auf die einzelnen Punkte einzugehen, spiegelt sich hier in dem Verständnis des digitalen Lernens im Wesentlichen die zentrale Stellung der Technologienutzung. Nicht nur vor dem Hintergrund der Diskussion Galloways, sondern auch in Abgrenzung zu Beispiel 1 zeigt sich hier ein grundlegend anderes Verständnis des Digitalen, das allgemein auf die Nutzung von Technologie im Mathematikunterricht fokussiert. Inwiefern sich digitales Lernen hingegen vom (nicht digitalen) Lernen abgrenzen lässt bzw. was digitales Lernen dem Wesen nach ausmacht, bleibt hier letztlich unbeantwortet.

Beispiele 3 und 4: Digital Environment und Digital Resources

Die folgenden beiden sehr kurzen Zitate zeigen schließlich die Verwendung des Begriffs des Digitalen in weiteren mathematikdidaktischen Forschungszusammenhängen auf.

> *„This study illustrated the power of digital environments, such as Cabri 3D, for developing dynamic experiences of shape and space“ (Panorkou & Pratt, 2016).*

> *„We sought to address this evidence gap by exploring how students described their experiences when working with three different kinds of digital resources – an immersive video game, an interactive website, and a commercially produced video – chosen specifically in relation to three distinct frameworks of motivation and engagement“ (Chao et al. 2016).*

In diesen Beispielen wird von digitalen Lernumgebungen und digitalen Ressourcen gesprochen. Unabhängig von der jeweiligen Verwendung machen diese Beispiele deutlich, erstens dass der Begriff des Digitalen in spezifischer Weise verwendet wird und zweitens jeweils zu klären wäre, inwiefern der Unterschied etwa zwischen einer Lernumgebung und einer digitalen Lernumgebung strukturell und inhaltlich vergleichbar ist mit dem Unterschied einer Ressource und einer digitalen Ressource.

Ausblick

Vor dem Hintergrund der Vielfalt der Verwendungsweisen der Begriffe Technik und Digitales, erscheint eine Diskussion über die werkzeugbezogenen Grundbegriffe notwendig zu sein. Ein Ziel einer solchen Diskussion ist zunächst sicher die Identifikation der Grundbegriffe zum digitalen Lernen. Im vorliegenden Text wurde anhand einer Begriffsausschärfung des Digitalen und der Technik versucht, zwei solcher Begriffe als Schlüsselbegriffe zu identifizieren. Im zweiten Schritt erscheint es notwendig, das Begriffsverständnis – auch mit Bezug auf die Verwendung in anderen Disziplinen – zu klären. Die Beispiele oben machen deutlich, dass die Begriffe durchaus unterschiedlich verwendet werden. Ziel einer solchen Klärung ist dabei dann weniger eine Vereinheitlichung in der Begriffsverwendung – dies erscheint nicht unbedingt notwendig. Vielmehr scheint es sinnvoll, durch die Diskussion für Transparenz und ggf. auch klare Abgrenzungen im jeweiligen Verständnis und der Verwendung der Begriffe zu sorgen.

Literatur

Ball, L., & Stacey, K. (2005). Good CAS written records: insights from Teachers. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2 (pp. 113–120). Melbourne: PME.

BMBF (2016). Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft. Strategie des Bundesministeriums für Bildung und Forschung. URL: https://www.bmbf.de/files/Bildungsoffensive_fuer_die_digitale_Wissensgesellschaft.pdf. (Zugriff am 23.03.2017).

Chao, T., Chen, J., Star, J.R. et al. (2016). Using Digital Resources for Motivation and Engagement in Learning Mathematics: Reflections from Teachers and Students. Digit Exp Math Educ, 2, 253-277. https://doi.org/10.1007/s40751-016-0024-6.

Clark-Wilson, A., Robutti, O., & Sinclair, N. (Eds.), The mathematics teacher in the digital era: An international perspective on technology focused professional development. Dordrecht: Springer.

Galloway, A. R. (2014). Laruelle. Against the Digital. Minneapolis, London.

Heidegger, M. (1953): Die Frage nach der Technik. In Martin Heidegger (2000), Vorträge und Aufsätze (S. 5-36). Frankfurt am Main: Klostermann.

Hischer, H. (2016). Mathematik – Medien – Bildung. Wiesbaden: Springer Spektrum. doi: 10.1007/978-3-658-14167-7.

KMK (2016). Bildung in der digitalen Welt. Strategie der Kultusministerkonferenz. URL: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2016/Bildung_digitale_Welt_Webversion.pdf (Zugriff am 23.03.2017).

National Council of Supervisors of Mathematics (2015). Mathematics Education in the Digital Age. URL: https://www.mathedleadership.org/docs/resources/position-papers/NCSMWhitePaper1.pdf. Zugriff am 23.11.2017.

Pimm, D. (2014). Integrated Circuits. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), The mathematics teacher in the digital era: An international perspective on technology focused professional development (pp. v-xii). Dordrecht: Springer.

Panorkou, N. & Pratt, D. (2016). Using Google SketchUp to Develop Students' Experiencesof Dimension in Geometry. Digit Exp Math Educ, 2, 199-227. https://doi.org/10.1007/s40751-016-0021-9.

Schacht, F. (2017). Between the Conceptual and the Signified: How Language Changes when Using Dynamic Geometry Software for Construction Tasks. Digital Experiences in Mathematics Education. DOI: 10.1007/s40751-017-0037-9.

Schacht, F. (2015a). Student Documentations in Mathematics Classroom Using CAS: Theoretical Considerations and Empirical Findings. The Electronic Journal of Mathematics and Technology, 9(5), 320–339.

Schacht, F. (2015b). Why Buttons Matter, Sometimes. How Digital Tools Affect Students' Documentations. In S. Carreira & N. Amado (Eds.), Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching ICTMT 12 (pp. 492–501). Faro, Portugal.

Sinclair, N, Bartolini Bussi, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016b). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. ZDM Mathematics Education, 48, 691–719. doi:10.1007/s11858-016-0796-6.

Weigand, H.-G. (2013). Tests and Examinations in a CAS-Environment - The Meaning of Mental, Digital and Paper Representations. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 2764–2773). Ankara

Vorbereitung der nächsten Lehrergeneration auf das „Digitale Lernen“ in der Schule

Reinhard Schmidt

In der Lehrerausbildung stehen wir vor der Aufgabe, die angehenden Lehrerinnen und Lehrer in hinreichendem Maße auf eine Schule vorzubereiten, die digitale Bildung sinnvoll realisiert. Welche Konsequenzen hat das für die Gestaltung der Ausbildung? Während sich mathematikspezifische digitale Werkzeuge wie GeoGebra weitgehend im Mathematikunterricht und mehr und mehr auch in der Lehrerausbildung etabliert haben, ist die Frage offen, wie Werkzeuge, die nicht spezifisch für den Mathematikunterricht entwickelt wurden (wie Videos, Etherpads, Wikis, digitale Schulbücher etc.), didaktisch sinnvoll eingesetzt und in welcher Weise sie Gegenstand der Ausbildung werden können. In diesem Artikel sollen Möglichkeiten für eine Integration beider Arten von Werkzeugen in die Ausbildung im Referendariat und eine beispielhafte Konzeption dafür, wie das „Digitale Lernen“ im Studienseminar Modell für das „Digitale Lernen“ in der Schule sein kann, vorgestellt werden.

Einleitung

Dass sich unsere Gesellschaft in einem tiefgreifenden Wandel befindet, ist unbestritten; ebenso unzweifelhaft ist, dass die Möglichkeiten digitaler Technologien eine entscheidende Triebfeder dieses Wandels sind. In diesem Zusammenhang spricht etwa Jens-Uwe Meyer von der „Digitalen Disruption“ (Meyer, 2017). Meyer prognostiziert, dass nicht nur Unternehmen, sondern auch die Schule in ihrer klassischen Ausprägung Objekt eines Angriffs durch disruptive Innovationen werden wird.

Tatsächlich ist ein Verständnis des Digitalen inzwischen eine Voraussetzung, um die aktuellen Nachrichten in Zeitung, Fernsehen und Internet zu verstehen. Bildung im Bereich des Digitalen ist zu einem wichtigen Teil der Emanzipation (die hochrangiges Bildungsziel der Schule ist) geworden. Dies allein ist Grund genug, dass Schule und Ausbildung von Lehrkräften sich mit dem Digitalen Lernen (sowohl in den Fächern als auch – insbesondere Mediendidaktik und Medienpädagogik – überfachlich) sehr ernsthaft befassen.

> *„In der digitalen Welt gehört da dazu, beispielsweise Bescheid zu wissen, was mit Daten passiert, wie Netzwerke funktionieren, wie das Internet funktioniert, wie Algorithmen funktionieren, die Daten verarbeiten – all das muss man wissen. Und wie kann ich als Gesellschaft sicherstellen, dass die nachwachsende Generation das systematisch lernt? Da gibt es eigentlich nur einen Ort, an dem ich das sicherstellen kann, und das ist die Schule." (Spannagel, 2014)*

Doch wie kann sich Schule vor dem „Digitalen Wandel" wappnen, wie sich ihm stellen, wie ihn gar konstruktiv mitgestalten? Dies ist ein schwieriges Unterfangen, zumal die Kernbegriffe („Digitalisierung", „Digitale Welt", „Digital Natives", …) von vielen Protagonisten der Schulpolitik diffus verwendet werden.

Die „Digitalisierung" bringt Beschleunigung, Dezentralisierung, Vereinfachung, Schematisierung, simulierte und „erweiterte" Wirklichkeit(en) mit sich und insbesondere auch die Verführung, Algorithmen mit Denken zu verwechseln. Wenn Schule darauf adäquat reagieren möchte, dann sind große Herausforderungen zu bewältigen. Dazu gehört, dass Schule Beschleunigung dort, wo sie der Bildung dienlich ist, annehmen kann, ihr aber dort, wo sie nicht dienlich ist, entgegenwirken muss. Dazu gehört, dass Schule der Tendenz zur Vereinfachung entgegenwirken und bei den Lernenden belastbare Urteilsfähigkeit entwickeln muss – die Liste der Herausforderungen ist lang.

Grundsätzlich hilfreich für eine Klärung der nächsten Schritte im Prozess der Integration des „Digitalen Lernens" in die Schulen sind in diesem Zusammenhang die Strategiepapiere des BMBF (BMBF, 2016) und der KMK (KMK, 2016). Das BMBF gibt in dem Strategiepapier das Ziel aus, dass alle Lehrkräfte über digitale Kompetenzen verfügen und diese vermitteln können (BMBF, 2016, S. 12). Als Hilfe zur Erreichung dieses Ziels wird, überspitzt gesagt, vorwiegend Geld angeboten, Geld, um Schulen und die Orte der Lehramtsausbildung mit zeitgemäßen Medien auszustatten. Was unter „digitalen Kompetenzen" zu verstehen ist und wie diese gefördert werden sollen, beantwortet das Papier nicht. Erhellender ist in diesem Sinne das Papier der KMK, das einen Kompetenzrahmen mit sechs Kompetenzbereichen vorschlägt. Diese beziehen sich jedoch überwiegend auf Mediendidaktik und Medienpädagogik; fachdidaktische Fragestellungen bleiben offen (was auch in der Natur des Papieres begründet ist).

Diesen Bereich mit Inhalt zu füllen, stellt eine der wichtigsten Aufgaben des fachdidaktischen Arbeitens dar.

> *„Die Förderung der Kompetenzbildung bei Lehrkräften, die ihren Bildungs- und Erziehungsauftrag in einer „digitalen Welt" verantwortungsvoll erfüllen, muss daher als integrale Aufgabe der Ausbildung in den Unterrichtsfächern sowie den Bildungswissenschaften verstanden und über alle Phasen der Lehrerbildung hinweg aufgebaut und stetig aktualisiert werden." (KMK, 2016, S. 24)*

Für den Mathematikunterricht sollten dabei mathematische Tätigkeiten (und nicht medienpädagogische Erwägungen) im Vordergrund stehen, der Mehrwert des Einsatzes digitaler Werkzeuge sollte in der fachdidaktischen Arbeit leitend sein. Medienpädagogik darf nicht als Vorwand dafür genutzt werden, digitale Werkzeuge nicht systematisch einsetzen zu müssen - andernfalls werden die Gefahren bleiben, die Möglichkeiten aber nicht genutzt werden, und die Schule wird von der Welt außerhalb der Schule abgehängt.

Mathematikunterricht mit digitalen Werkzeugen

Blickt man in den Mathematikunterricht an den weiterführenden Schulen in Deutschland, so scheinen digitale Werkzeuge wie GeoGebra sich etabliert zu haben.

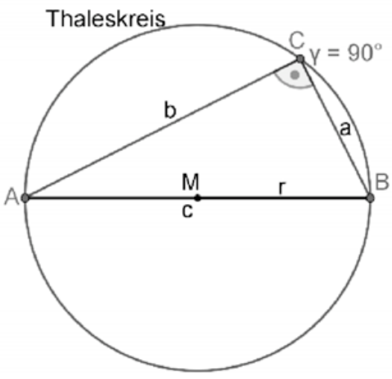


Abb. 1: Ziehen und Zerren an Punkt C zeigt: Stets ist G = 90°.
Begründungen oder gar ein Beweis sind überflüssig!?

Aber die Spannweite der didaktischen Qualität des Einsatzes der digitalen Werkzeuge ist groß. Sie reicht von bloßen Visualisierungen, die vielfach ein Beweisbedürfnis im Keim ersticken, also Mathematik verhindern (Abb. 1), bis hin zu Werkzeugeinsatz, der dem fachlichen Lehren und Lernen einen klaren Mehrwert bietet.

Viele angehende Lehrerinnen und Lehrer setzen gerne und mutig digitale Werkzeuge im Unterricht ein, vielfach jedoch zu unreflektiert als bloße Visualisierungen. Selten sind Beispiele, in denen der Einsatz mathematischer Werkzeuge das Bedürfnis nach forschender mathematischer Tätigkeit befeuert. Freilich bedarf es für diesen hohen Anspruch wohl auch neuer Aufgaben, die auf die Möglichkeiten der Werkzeuge abgestimmt sind – und das ist harte fachdidaktische Arbeit. Diese Arbeit wird entscheidend sein für die Qualität des Einsatzes digitaler Werkzeuge:

> *„Der Einsatz digitaler Medien für den Fachunterricht ist immer auch daran zu messen, inwieweit er den verständigen Zugang zu mathematischen Begriffen und Verfahren befördert und festigt.“ (GDM, 2017, S. 41)*

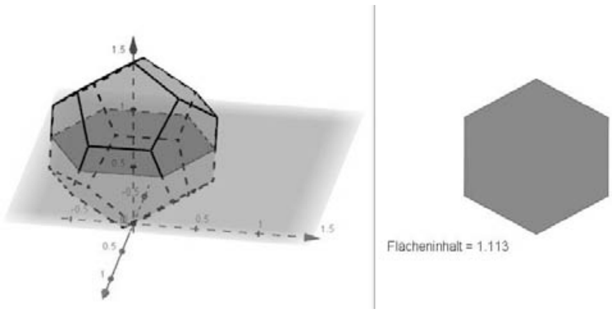


Abb. 2: Beim Schnitt eines Dodekaeders mit einer Ebene ergeben sich regelmäßige Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke und sogar Zehnecke als Schnittfiguren. Spannend ist es, den Flächeninhalt der Schnittfläche in Abhängigkeit von der Lage der Ebene zu untersuchen: Aus dem „Schnittflächeninhaltsgraphen“ lässt sich das Volumen des Körpers ermitteln.

Als Beispiel für Aufgaben, die diesen „verständigen Zugang zu mathematischen Begriffen und Verfahren“ ermöglichen, können die Schnitte durch elementare Körper wie Kugel, Kegel oder durch Platonische Körper dienen (vgl. Schmidt, 2015). Sie ermöglichen reichhaltige Fragestellungen quer durch alle Jahrgangsstufen:

- Welche Schnittfiguren entstehen, wenn eine Ebene durch einen Körper (z.B. durch einen Dodekaeder) „wandert“? Welche können nicht entstehen?
- Welcher Körper „passt“ zu einer Folge von Schnittfiguren?
- Wie verändert sich der Flächeninhalt der Schnittfiguren während der „Wanderung“ der Ebene durch den Körper? Kann man die funktionale Abhängigkeit durch einen Funktionsterm angeben?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem „Schnittflächengraphen“ und dem Volumen des Körpers?
- Gibt es verschiedene Körper, die denselben „Schnittflächengraphen“ besitzen? Welche Graphen kann man als Schnittflächengraphen interpretieren, so dass man die zugehörigen Körper ermitteln kann?
- …

Überlegungen zum Thema im Fachseminar Mathematik

Wenn die nächste Lehrergeneration das „Digitale Lernen“ in die Schule bringen soll, müssen sie in den beiden Phasen der Lehrerausbildung entsprechend ausgebildet werden. Der Beitrag der Universität variiert stark – je nach Standort, je nach Lehrperson. Aktuell kann man nicht davon ausgehen, dass die Absolventen der Universität über belastbare Bedienkompetenzen im Umgang mit digitalen Werkzeugen verfügen. Zwar hat die überwiegende Mehrheit vor Beginn des Referendariats schon mit digitalen Werkzeugen wie GeoGebra gearbeitet. Komplexere Applets oder Lernumgebungen können jedoch nur wenige erstellen.

Dadurch wird es zur unabweisbaren Aufgabe des Referendariats und für die digitalen Werkzeuge des Mathematikunterrichts speziell des Fachseminars Mathematik, die „digitalen Kompetenzen“ systematisch aufzubauen. „Harte“ Vorgaben gibt es im Bereich der digitalen Kompetenzen für die zweite Phase nur wenige, so dass die Studienseminare (in NRW werden die Studienseminare als Zentren für schulpraktische Lehrerausbildung, kurz ZfsL bezeichnet) relativ viel Gestaltungsspielraum haben.

Abb. 3: Digital Natives: Vieles können sie schon ganz selbstverständlich,
doch auch für sie bleibt die Bedienkompetenz eine Herausforderung.

Im Lehramt für Gymnasien und Gesamtschulen im ZfsL Engelskirchen wird die Entwicklung von digitalen (Werkzeug-)Kompetenzen auf 5 Säulen gestellt.

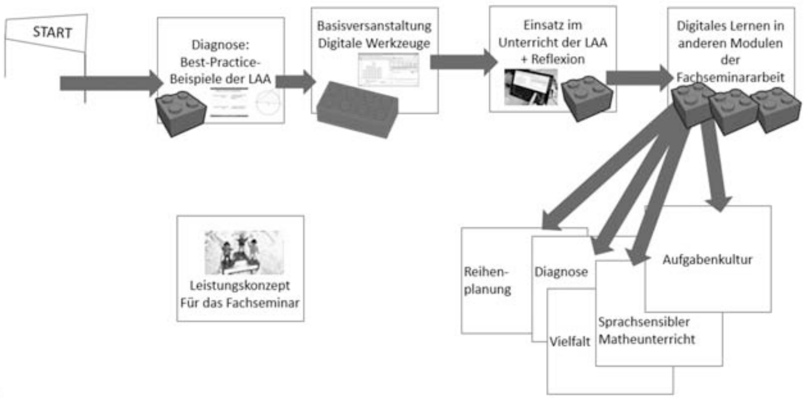


Abb. 4: Das Medienkonzept für das Fachseminar Mathematik,
Seminar GyGe ZfsL Engelskirchen

1. Diagnose:

Die sehr unterschiedlichen Eingangskompetenzen im Bereich der digitalen Werkzeuge machen es erforderlich, dass diese zu Beginn der Ausbildung der Referendarinnen und Referendare diagnostiziert werden. Zu diesem

Zweck werden zu einem sehr frühen Zeitpunkt in der Ausbildung (möglicherweise während des Studiums entwickelte oder aus der Schulzeit noch bekannte) „Best-Practice-Beispiele“ der Referendarinnen und Referendare während einer Fachseminarsitzung präsentiert, reflektiert und (vor allem hinsichtlich ihrer Funktionalität) diskutiert.

2. Aufbau von Werkzeugkompetenzen:

In einer zweitätigen Kompaktveranstaltung werden verschiedene digitale Werkzeuge (neben GeoGebra auch digitale Lernpfade, Lernvideos usw.) vorgestellt. Im Workshop-Format können die Referendarinnen und Referendare Bedienkompetenzen aufbauen, dabei zielgerichtete Lernumgebungen erstellen und diese dann unter der Perspektive des didaktischen Mehrwerts reflektieren.

3. Rückkopplung mit der Praxis:

Im Anschluss an die Kompaktveranstaltung, aber auch später im gesamten Verlauf der weiteren Ausbildung sind die Referendarinnen und Referendare aufgefordert, ihre digitalen Kompetenzen in Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht einzubringen und im Anschluss an Gruppenhospitationen oder an Unterrichtsbesuche zum Gegenstand der Beratung durch die Fachleitung zu machen. Leitende Fragestellungen sind dabei einerseits der didaktische Mehrwert, andererseits die Frage, inwieweit bei den Schülerinnen und Schülern Werkzeugkompetenzen aufgebaut werden konnten.

4. Einbindung in das Leistungskonzept:

Wenn die digitalen Kompetenzen der angehenden Lehrkräfte wichtiger Bestandteil der Ausbildung sein sollen, dann müssen diese auch prominent differenziert und detailliert im Leistungskonzept (also einer Beschreibung der fachspezifischen Kompetenzen und Standards, die Grundlage der Bewertung der Referendarinnen und Referendare ist) des Fachseminars Mathematik Erwähnung finden. Zu unterscheiden sind etwa Fähigkeiten zur lernförderlichen Gestaltung von Lernumgebungen und Applets, zum funktionalen und zielgerichteten Einsatz digitaler Werkzeuge und Medien im Unterricht, zum systematischen Aufbau von Werkzeugkompetenzen bei den Schülerinnen und Schülern oder die Fähigkeit zur Reflexion des Medieneinsatzes.

5. Digitale Medien als roter Faden der Ausbildung:

Eine punktuelle Arbeit am Thema „Digitales Lernen“ ist nicht ausreichend, um die zukünftigen Lehrkräfte auf das „Digitale Lernen“ in der Schule nachhaltig vorzubereiten. Daher muss das Thema quer durch die Fachseminarsitzungen immer wieder aufgegriffen werden, sei es im Zusammenhang mit Reihenplanung, mit Aufgabenkultur oder mit sprachsensiblem Unterricht.

Damit bei den Referendarinnen und Referendaren die digitalen Kompetenzen in der beschriebenen Weise nachhaltig aufgebaut werden können, muss Klarheit darüber bestehen, was unter digitalen Kompetenzen überhaupt zu verstehen ist. Wie eingangs erwähnt liefert der Kompetenzrahmen des KMK-Strategiepapiers (KMK, 2016) fachdidaktisch zu wenig konkrete Hinweise. Hilfreicher sind hier die Ausführungen in (Heintz et al., 2017), die hier durch die das folgende Schema wiedergegeben werden sollen, das insbesondere darauf verweist, dass Werkzeugkompetenz viel mehr als nur Bedienkompetenz ist, und eine bewusste und zielgerichtete Auswahl eines geeigneten Werkzeugs vor der eigentlichen Arbeit mit dem Werkzeug ebenso umfasst wie eine begleitende Dokumentation sowie eine Reflexion über Möglichkeiten und Grenzen nach dem Problemlöseprozess:

Abb. 2: Bedienkompetenz ist wichtig, aber Werkzeugkompetenz ist weit mehr.
Abbildung von R. Schmidt, entnommen aus (Heintz et al., 2017, S. 171)

Wenn es gelingt, dass die nächste Lehrergeneration digitale Werkzeuge wie GeoGebra so in den Unterricht integriert, dass die Lernenden dadurch mehr Mathematik lernen, ist viel erreicht. Dass dadurch allein das „Digitale Lernen" in die Schule kommt, darf aber bezweifelt werden. Damit Schülerinnen und Schüler ihre Schulzeit in dem Bewusstsein erleben, dass das „Digitale Lernen" in der Schule angekommen ist, müssen diejenigen digitalen Medien, Werkzeuge und Apps, die außerhalb der Schule zum Alltag gehören, zum selbstverständlichen Bestandteil des Unterrichts werden. Im nächsten Abschnitt sollen Möglichkeiten vorgestellt werden, wie dies gelingen kann.

Mehr als GeoGebra - Videos, Etherpads und Wikis

Wenn erreicht werden soll, dass digitale Medien und Werkzeuge in der Schule ebenso selbstverständlich sind wie außerhalb der Schule, und dass es für Schülerinnen und Schüler zur Selbstverständlichkeit wird, dass digitale Medien gezielt als digitale Werkzeuge eingesetzt werden können, dann müssen digitale Medien in einer deutlich größeren Breite (sowohl hinsichtlich der Werkzeuge als auch hinsichtlich der Fächer, in denen sie eingesetzt werden) zunächst in die Lehrerausbildung integriert und dann in der Schule implementiert werden – ganz im Einklang mit den Vorstellungen der KMK:

> *„Wenn sich in der „digitalen Welt" die Anforderungen an Schule und damit an alle Lehrkräfte nachhaltig verändern, dann wird perspektivisch Medienbildung integraler Bestandteil aller Unterrichtsfächer sein und nicht mehr nur schulische Querschnittsaufgabe." (KMK, 2016, S. 23-24)*

Wie dieser Auftrag umgesetzt werden kann, soll nun anhand mehrerer Beispiele verdeutlicht werden:

1. Erklärvideos vs. Lernvideos

In den letzten Jahren sind sogenannte Erklärvideos immer populärer und bei Schülerinnen und Schülern immer beliebter geworden. Besonders populär sind diejenigen von Felix Fähnrich und Carsten Thein, die im Rahmen des Projekts „Flip the classroom" (www.fliptheclassroom.de) angeboten werden. Trotz ihrer Beliebtheit bei Schülerinnen und Schülern fordern Erklärvideos und das häufig damit verbundene Konzept des Flipped Classroom Widerstand heraus:

> *„Ihr zeigt ein Video, das die Schülerinnen und Schüler nur halb verstehen und jetzt kommen unbetreute Aufgaben. Mehr könnt ihr die Schülerinnen und Schüler nicht vor den Kopf stoßen.“ (Gieding, 2017)*

In vielen Videos wird in der Tat einfach nur (und zwar möglichst prägnant und kompakt) ein Verfahren, ein Algorithmus erklärt. Schülerinnen und Schüler sind dann zum „Hinterherdenken“ gezwungen, vertieftes Verständnis oder gar Mathematik als Diskurs und als kreative Tätigkeit kommen zu kurz. Wenngleich auch diese Videos in bestimmten Zusammenhängen sicherlich ihren Wert haben, scheint doch eine weitaus größere Lernchance in Videos zu bestehen, die, statt zu erklären, Fragen aufwerfen, zu mathematischem Forschen anregen und den Austausch mit anderen anregen. Diese Überlegungen führen zur Frage, welche überfachlichen Ziele mit Technologie verfolgt werden; hier gibt Kurt Söser eine Antwort:

> *„Raise awareness, start conversation, find answers, join partners, change mind, make a difference, take action, drive change“ (Söser, 2015)*

Der Mathematikunterricht wie auch der der anderen Fächer muss sich die Frage stellen, ob Technologie auch in diesem Sinne ertragreich eingesetzt wird. Die Lehramtsausbildung muss diese Zielrichtung stärker als bisher berücksichtigen.

2. Etherpads

Wenn Kommunikation, das gemeinsame Ringen um Begriffe und Klärungen und das Verhandeln von Lösungswegen und Lösungen wichtige Ziele des Einsatzes digitaler Technologien sind, dann liegt es nahe, die Möglichkeiten von Technologie für die gemeinsame Kommunikation zu nutzen. Ein beliebtes und populäres Tool für diese Zwecke sind die Etherpads. Etherpads wie das ZUMPad (ZUM, 2015) sind kostenlos und ohne Anmeldung nutzbar und sind hinsichtlich der Bedienkompetenz sehr niederschwellig. Die Möglichkeiten sind gleichwohl groß, weil sich mit ihnen die Vorteile „klassischer“ Unterrichtsmethoden wie Brainstorming, Schreibgespräch oder auch Exploration mit den Vorteilen der digitalen Technologie verbinden lassen. Es befeuert kreative Beiträge, berücksichtigt das individuelle Lerntempo und fördert die Kommunikationsbereitschaft auch von sonst zurückhaltenden Schülerinnen und Schülern.

3. Wikis

Ebenfalls sehr gut für das kollaborative Arbeiten geeignet sind Wikis. Wikis ermöglichen es, dass verschiedene Menschen gemeinschaftlich an Texten arbeiten und so ein gemeinsames Produkt erstellen. Wie auch bei den Etherpads sind die technischen Hürden eher niedrig. Wikis bieten allerdings im Vergleich deutlich mehr Möglichkeiten (z. B. Einbindung von Bildern, Verlinkung von pdf-Dateien, Anpassung des Layouts), so dass der Fokus weniger auf der schnellen Sammlung kreativer Beiträge, sondern eher auf dem gemeinsam erstellten Produkt liegt.

Für die Ausbildung im Seminar eignen sich die Wikis hervorragend, um im Sinne des Blended Learning e-Learning-Module zu entwickeln, an die dann in der Präsenzsitzung angeknüpft wird. Üblicherweise werden Referendarinnen und Referendare in diesen Modulen aufgefordert, (aus dem Studium weitgehend bekannte) theoretische Konzepte mit ihren unterrichtlichen Erfahrungen abzugleichen und in ihrer „Schulgruppe" (den anderen Referendarinnen und Referendaren an derselben Schule) zu besprechen. In der folgenden Präsenzsitzung steht dann viel Zeit für die theoriegeleitete Reflexion relevanter Praxissituationen (dem Kerngeschäft der zweiten Phase) zur Verfügung, und die Einzelerkenntnisse können vom höheren Standpunkt überdacht werden.

Ebenfalls naheliegend ist die Dokumentation und Reflexion der Seminarsitzungen durch die Referendarinnen und Referendare, die das Ringen um eine gemeinsame Sichtweise einer Seminargruppe begünstigt.

Wenn im Referendariat die Arbeit im Wiki zur Normalität wird, dann wird damit die Voraussetzung geschaffen, dass die angehenden Lehrkräfte auch für den Unterricht Lernumgebungen im Wiki-Format erstellen, z. B. digitale Lernpfade, wie sie auf den Mathe-Seiten des ZUM-Wikis (https://wiki.zum.de/wiki/Mathematik-digital) angeboten werden.

4. Digitale Notizbücher: OneNote

Die Zukunft des Schulbuchs ist digital. Doch wenn man nach guten digitalen Mathematik-Schulbüchern sucht, findet man wenig, das mehr ist als eine pdf-Version der analogen Schulbücher.

Bis sich dieser Zustand ändert, kann jede Lehrerin und jeder Lehrer sein digitales Schulbuch selbst gestalten. Das im Microsoft-Office-Paket enthaltene OneNote (insbesondere in Verbindung mit dem OneNote-Add-Ins für Kursnotizbücher) bietet eine ebenso einfache wie umfassende Möglichkeit, ein individuelles „Buch“ für jeden Kurs zu erstellen. Das Einbinden von Bildern, GeoGebra-Dateien oder pdf-Daten ist in Sekundenschnelle realisiert, kollaboratives Arbeiten ist selbstverständlich, und für jeden Lernenden ist eine individuelle Rückmeldung unkompliziert möglich.

Vielleicht sind die klassischen Schulbücher, ohne es zu merken, Opfer einer disruptiven Innovation geworden.

Schlussbemerkung

An electric guitar is a tool, it does not give any music.
You need great musicians to do that. (Sir Ken Robinson)

Es gibt auch über den Taschenrechner und GeoGebra hinaus viele digitale Medien, die durch den richtigen Einsatz im Unterricht zu nützlichen Werkzeugen werden können. Doch bei aller Begeisterung über die Möglichkeiten digitaler Medien darf nicht vergessen werden, und auch das ist eine fundamental wichtige Botschaft in der Lehramtsausbildung, dass mir ein Werkzeug nur dann hilft, wenn ich die Kunst und die Technik beherrsche und das Werkzeug mit Bedacht einsetze. Kein digitales Medium, kein Werkzeug garantiert guten Mathematikunterricht. Aber sinnvoll eingesetzt fördern digitale Werkzeuge das Mathematiktreiben: die Begriffsbildung, die Kommunikation, den Diskurs, das Ringen um Erkenntnis, das gemeinsame Lernen.

Bilden wir also die angehenden Lehrkräfte so aus, dass sie die digitalen Werkzeuge so eindrucksvoll und virtuos einsetzen wie Eric Clapton seine E-Gitarre.

Literatur

BMBF (2016). Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft. https://www.bmbf.de/files/Bildungsoffensive_fuer_die_digitale_Wissensgesellschaft.pdf

Heintz, Gaby; Elschenbroich, Hans-Jürgen; Laakmann, Heinz; Langlotz, Hubert; Rüsing, Michael; Schacht, Florian; Schmidt, Reinhard; Tietz, Carsten (2017). Werkzeugkompetenzen. Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben. Menden: Medienstatt.

KMK (2016). Bildung in der digitalen Welt. Strategie der Kultusministerkonferenz. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2016/Bildung_digitale_Welt_Webversion.pdf

GDM Positionspapier (2017). https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/59/205

Michael Gieding (2017). Nicht flippig genug! https://cspannagel.wordpress.com/2017/06/16/nicht-flippig-genug/

Meyer, Jens-Uwe (2017). Digitale Disruption: Die nächste Stufe der Innovation. Göttingen: BusinessVillage

Schmidt, Reinhard (2015). Schnitte durch Würfel, Kugel und Kegel. In: Mathematik Lehren, Heft 190, Seelze: Friedrichverlag, S. 26-31.

Spannagel, Christian (2014): 10 Irrtümer zum Einsatz digitaler Medien in der Schule. https://www.youtube.com/watch?v=HsXP528OVtU.

Köser, Kurt (2015). What you want your students to do with technology? In: OneNote für Lehrer. http://www.kurtsoeser.at/2015/07/08/onenote-fuer-lehrer/

Zentrale für Unterrichtsmedien im Internet e. V. (2015). ZumPad. https://zumpad-zum.de/

Regression: Ein Thema, das in vielerlei Hinsicht für den Einsatz neuer Medien geeignet ist

Jens Weitendorf

Einleitung

Dem folgenden Artikel wird ein Zitat aus Hischer: „Mathematikunterricht und Neue Medien“ zu Grunde gelegt:

> *Das Ziel dieses Buches ist es darzulegen, dass die Neuen Medien im Spannungsfeld zwischen den beiden hier betonten Dimensionen Spiel und Technologie von großer Allgemeinbildungsrelevanz sind, und zwar nicht nur bezüglich des Einsatzes im Unterricht, also als nützliches Werkzeug und Hilfsmittel, sondern auch und gerade als Gegenstand des Unterrichts, also als Unterrichtsinhalt. (ebd. S.293)*

Es wird ein Unterrichtsgang für die Einführung der Regression dargestellt. An diesem paradigmatischen Beispiel wird beschrieben, in wie weit es möglich ist, digitale Medien im Unterricht einzusetzen. Das heißt, an diesem Beispiel wird gezeigt, in wie fern Schülerinnen und Schüler eigenständig arbeiten können und wo die Grenzen dieser Eigenständigkeit liegen. Des Weiteren wird das Medium selbst zum Unterrichtsgegenstand, da davon auszugehen ist, dass Schülerinnen und Schüler das Medium als solches erkunden und dann deren Möglichkeiten nutzen. So konnte ich beobachten, dass Lernende die Regression nutzen, um aus vorgegebenen Werten Gleichungen ganzrationaler Funktionen zu bestimmen. Dies geschah, ohne dass die Regression vorher im Unterricht thematisiert wurde.

Zusammenfassend lassen sich an Hand des Beispiels die Möglichkeiten und Grenzen des Einsatzes digitaler Medien diskutieren. Als Medium wird fast durchgängig der ClassPad II eingesetzt.

Zur Einführung

Den Schülerinnen und Schülern werden zunächst 4 Punkte vorgegeben verbunden mit der Aufgabe, eine Gerade zu finden, die diese 4 Punkte möglichst gut repräsentiert (s. Abb. 1). Vorgegeben sind die Punkte A, B, C und D. Die Punkte E und F sind Hilfspunkte, um die Lage der Geraden zu verändern.

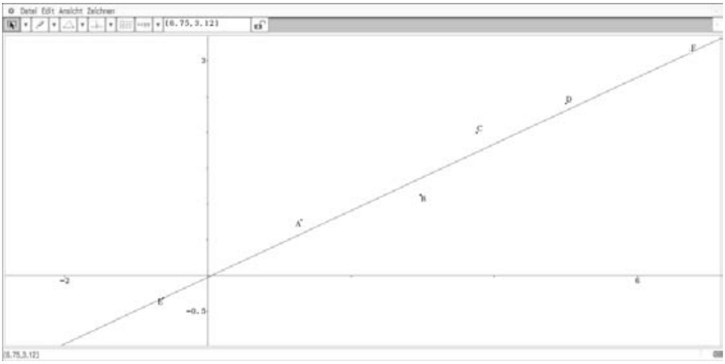


Abb. 1 Ein erster Ansatz für eine optimale Gerade

Aus diesem ersten Ansatz ergeben sich Fragen wie zum Beispiel:

- Welche Gerade ist am besten geeignet?
- Welches Kriterium bestimmt dies?
- Macht es Sinn, durch den „Anfangs-“ und „Endpunkt“ eine Gerade zu legen?
- Wie erreicht man es, dass die Gerade alle gegebenen Punkte möglichst gut repräsentiert?

Diese Fragen sind im Unterricht zu diskutieren. Eine Möglichkeit wäre es, eine Gerade durch die Mitte zu legen, so dass sich die Abstände der oberhalb und unterhalb der Geraden liegenden Punkte gerade ausgleichen. Eine solche Gerade ist aber nicht eindeutig bestimmbar, da dies für alle Geraden mit der Eigenschaft $M\left(\acute{x},\acute{y}\right)\in g$ gilt. Dies führt unter Umständen dazu, dass man die Abstandssumme der gegebenen Punkte zur Geraden minimiert (s. Abb. 2). Durch die Benutzung einer DGS wird eigentlich ausgeschlossen, dass die Schülerinnen und Schüler für Punkte, die z. B. unterhalb liegen, negative Werte einsetzen. Der Zusammenhang zu den Forderungen, dass der Mittelpunkt $M\left(\acute{x},\acute{y}\right)\in g$ und die Abstandssumme minimiert wird, wird später diskutiert.

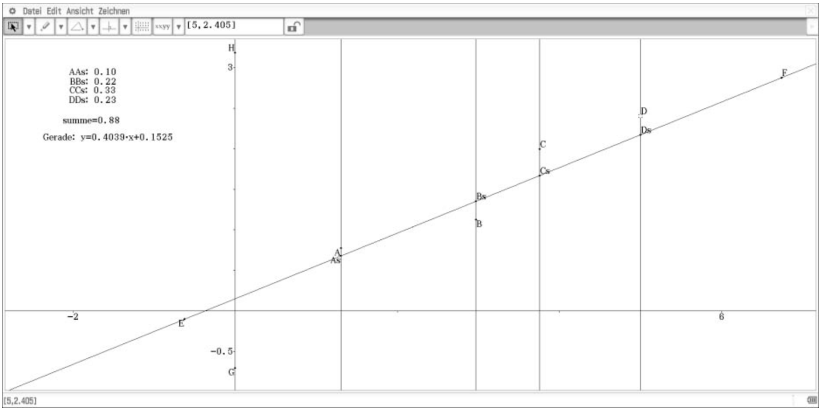


Abb. 2 Minimierung der Abstandssumme

Durch Probieren erhalten die Schülerinnen und Schüler einen minimalen Wert für die Abstandssumme von s = 0,6. Einige Lernende werden sicher die Idee haben, die lineare Regression des ClassPad zu benutzen. (s. Abb. 3)

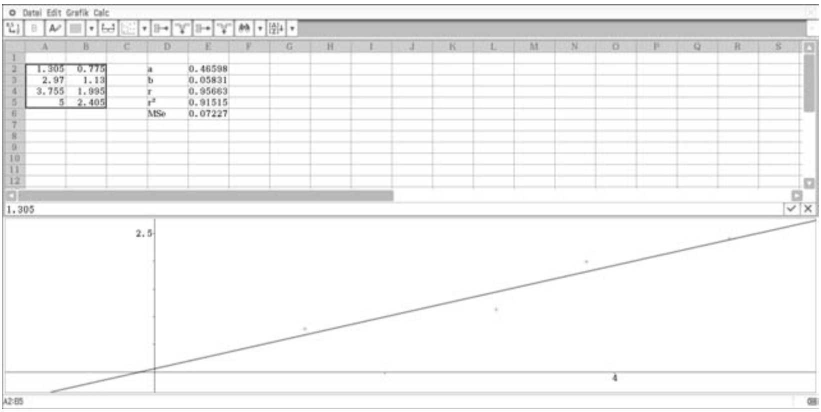


Abb. 3 Die Lösung des ClassPad

Die Methode der kleinsten Quadrate nach Gauss

Bildet man bezogen auf die ClassPad-Lösung die Abstandssumme, wie oben beschrieben, so ergibt sich ein Wert für s = 0,62. Das bedeutet, dass offensichtlich ein anderes Verfahren benutzt wird. An dieser Stelle des Unterrichts ist eine Erklärung der Lehrperson erforderlich, die das übliche

Verfahren erläutert. Ungeklärt bleibt zunächst, warum die Bildung der Quadratabstandssumme geeigneter ist. Des Weiteren ergeben sich die Fragen, wie der ClassPad das Minimum bestimmt und welche Bedeutung die Angaben *r* und *MSe* haben. Dies gilt es im folgenden Unterricht zu klären. Die Frage, ob die Quadratabstandssumme ein Minimum besitzt, lässt sich durch eine geeignete Visualisierung klären. (s. Abb. 4)

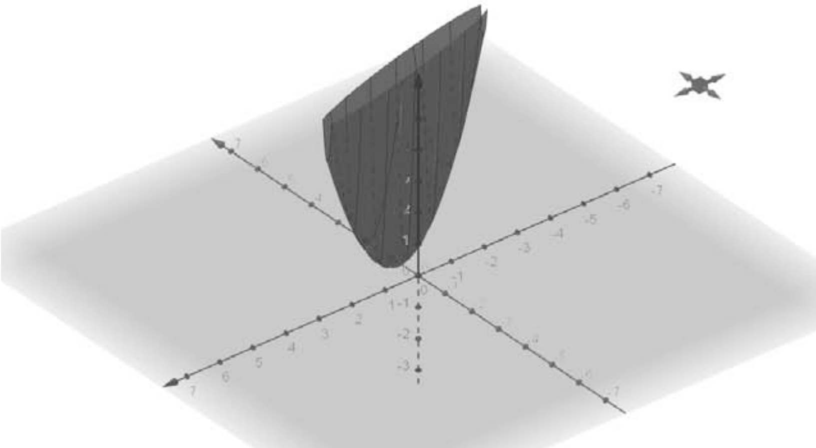


Abb. 4 Minimum der Quadratabstandssumme

Für die Schülerinnen und Schüler ist die Bestimmung eines Extremums einer Funktion $f: IR^2 \rightarrow IR$ unbekannt. Mit Unterstützung der Visualisierung (s. Abb. 4) ist zu klären, dass für die beiden partiellen Ableitungen notwendigerweise

$$\frac{\delta f(x,y)}{\delta x} = 0 und \frac{\delta f(x,y)}{\delta y} = 0$$

gelten muss. Das Lösen dieser beiden Gleichungen und des sich ergebenden Gleichungssystems kann dann dem Rechner überlassen werden. (s. Abb. 5) Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass sich dieselbe Geradengleichung ergibt, die zuvor mit Hilfe der Regression vom ClassPad bestimmt wurde.

```
define f(x,y)=(5·x+y-2.405)^2+(3.755·x+y-1.995)^2+(2.97·x+y-1.13)^2+(1.305·x+y-0.775)^2
                                                                              done
d/dx(f(x,y))
                                                  (992479·x+260600·y-477674)/10000
d/dy(f(x,y))
                                                          (2606·x+800·y-1261)/100
solve({(992479·x+260600·y-477674)/10000=0, (2606·x+800·y-1261)/100=0}, x, y)
                                            {x=0.4659828173, y=0.0583109727}
```

Abb. 5 Bestimmung des Minimums der Quadratabstandssumme

Zu klären bleibt die Bedeutung der weiteren Angaben, die zusätzlich zur Berechnung der Regression gemacht werden. Hier ist abzuwägen, ob die Lehrkraft die Lernenden recherchieren lässt oder im Lehrervortrag klärt. Für den Korrelationskoeffizienten gilt:

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\acute{x})\cdot(y_i-\acute{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\acute{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\acute{y})^2}}.$$

Diese Formel ist natürlich so für die Lernenden nicht nachvollziehbar. Hilfestellung bietet hier ein Ansatz aus Eichler/ Vogel oder Engel. Die gegebenen Daten werden durch ein Kreuz mit dem Mittelpunkt im arithmetischen Mittel $M(\acute{x},\acute{y})$ in 4 Quadranten eingeteilt. Es lässt sich zeigen, dass $-1\leq r\leq 1$ gilt. Der Zusammenhang zum Skalarprodukt sollte im Unterricht besprochen werden. Durch Beispiele sollten die Schülerinnen und Schüler die Bedeutung des Korrelationskoeffizienten erfahren. Da dies mit der gegebenen Datenmenge nicht zu bewerkstelligen ist, wird an dieser Stelle auf eine vertiefte Diskussion verzichtet und auf Beispiele in Eichler/ Vogel (S. 71 ff.) oder Engel (S. 244 ff.) verwiesen.

Leichter nachzuvollziehen ist die mittlere quadratische Abweichung

$$MSe=\frac{\sum_{i=1}^{n}(g(x_i)-y_i)^2}{n-2}.$$

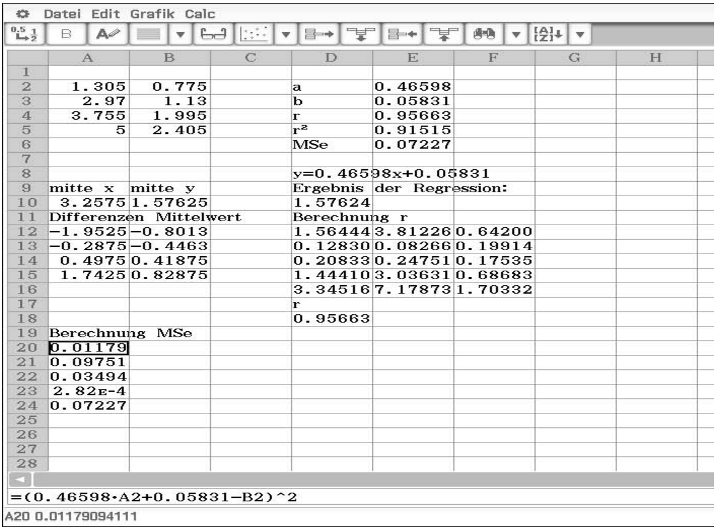
Schwierigkeiten bereitet hier das Verständnis des Divisors n – 2. In Lehrwerken zur Statistik findet sich in der Regel der Hinweis, dass es bezogen auf die lineare Regression $y=a\cdot x+b$ zwei Schätzwerte a und b gibt. Dabei wird sich oft in einem verallgemeinerten Sinn auf Punktwolken bezogen Dies wird besonders deutlich, wenn Wikipedia zu Rate gezogen wird. Dort heißt es:

> *Die mittlere quadratische Abweichung, auch der mittlere quadratische Fehler genannt und MQF oder MSE (aus dem englischen für mean squared error) abgekürzt, ist ein Begriff der mathematischen Statistik. Er gibt in der Schätztheorie an, wie sehr ein Punktschätzer um den zu schätzenden Wert streut. Damit ist er ein zentrales Qualitätskriterium für Schätzer. (zitiert nach Wikipedia, 10.17; Hervorhebung durch den Auto*

Spiegel /Stephens bemerken zur (n-2)-Problematik, dass manche Statistiker (n-2) anstatt n bevorzugen (ebd. S. 386). Fisz geht auf das Problem überhaupt nicht weiter ein und benutzt n als Divisor (ebd. S.122ff). Ausführlicheres findet sich in Arens, Hettlich u.a.. Dort heißt es:

> *Der Nenner n – Dim(M) trägt der wachsenden Komplexität Rechnung und setzt*
>
> $$SSE=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\acute{y})^2$$
>
> *mit der Dimension des Modellraums und der Anzahl n der Beobachtungen in Beziehung. (ebd. S. 1419)*

Wenn dem so ist, gibt es offensichtlich kein für Schülerinnen und Schüler nachvollziehbares Argument, warum als Divisor (n-2) gewählt wird. Des Weiteren wird eine Grenze des selbstständigen Entdeckens für Lernende aus der Diskussion deutlich. Die Schülerinnen und Schüler sollten den vom ClassPad ermittelten Wert für MSe mit Hilfe der Tabellenkalkulation nachrechnen. (s. Abb. 6) Vielleicht äußern die Lernenden schon aus den Beispielen, dass für die Regressionsgerade gilt: $M(\acute{x},\acute{y})\in g$. Für den Beweis ist die allgemeine Herleitung erforderlich. Im Unterricht sollte man auf die Herleitung verzichten, da sie für die Schülerinnen und Schüler zu abstrakt ist. Das CAS des ClassPad ist leider auch nicht in der Lage, die benötigten Summen zu verarbeiten.


Datei Edit Grafik Calc

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	1.305	0.775		a	0.46598			
3	2.97	1.13		b	0.05831			
4	3.755	1.995		r	0.95663			
5	5	2.405		r^2	0.91515			
6				MSe	0.07227			
7								
8				y=0.46598x+0.05831				
9	mitte x	mitte y		Ergebnis der Regression:				
10	3.2575	1.57625		1.57624				
11	Differenzen Mittelwert			Berechnung r				
12	-1.9525	-0.8013		1.56444	3.81226	0.64200		
13	-0.2875	-0.4463		0.12830	0.08266	0.19914		
14	0.4975	0.41875		0.20833	0.24751	0.17535		
15	1.7425	0.82875		1.44410	3.03631	0.68683		
16				3.34516	7.17873	1.70332		
17				r				
18				0.95663				
19	Berechnung MSe							
20	0.01179							
21	0.09751							
22	0.03494							
23	2.82E-4							
24	0.07227							
25								
26								
27								
28								

=(0.46598·A2+0.05831−B2)^2

A20 0.01179094111

Abb. 6 Berechnung von r und Mse

- $S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a x_i-b)^2$
- $\frac{\partial S}{\partial b}=2\cdot(-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-a x_i-b)$
- $\frac{\partial S}{\partial b}=0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n}(y_i-a x_i-b)=0$
- $\sum_{i=1}^{n} y_i-a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i-n\cdot b=0$
- $\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}-a\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}-b=0$
- $\acute{y}-a\cdot\acute{x}-b=0 \rightarrow \acute{y}=g(\acute{x})$

- $S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a\,x_i-b)^2$
- $\dfrac{\partial S}{\partial a}=2\cdot(-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-a\,x_i-b)\cdot x_i$
- $\dfrac{\partial S}{\partial a}=0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i\cdot x_i-a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^{\;2}-b\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i=0$
- $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}-a\cdot\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}=b$
- $\sum_{i=1}^{n} y_i\cdot x_i-a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^{\;2}-\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}-a\cdot\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i=0$
- $\sum_{i=1}^{n} y_i\cdot x_i-a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^{\;2}-(\acute{y}-a\cdot\acute{x})\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i=0$
- $a=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i.x_i+\acute{y}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\;2}-\acute{x}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i} b=\acute{y}-\acute{x}\cdot\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i.x_i+\acute{y}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\;2}-\acute{x}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i}$

Dadurch wird allerdings zum einen geklärt, wie ein digitales Medium die Regressionsgerade bestimmt und zum anderen, wie schon oben erwähnt, dass $M(\acute{x},\acute{y})\in g$ gilt. Zu diskutieren ist jetzt noch die Frage, ob sich nicht die gleiche Geradengleichung ergibt, wenn zusätzlich zur Optimierung der einfachen Abstandssumme gefordert wird, dass $M(\acute{x},\acute{y})\in g$ gilt. Fordert man dies auch von vornherein für die Methode der kleinsten Quadrate, so ergeben sich für die zu minimierenden Funktionen eindimensionale, die sich problemlos darstellen lassen. Die notwendigen Umformungen bewältigt das CAS. Der Vergleich der beiden Funktionen (s. Abb. 7) zeigt, dass sich für die Minima unterschiedliche Werte ergeben. Die beiden Minima lassen sich einzeln grafisch bestimmen. Aus der Darstellung der Graphen wird deutlich, dass die Methode der kleinsten Quadrate den Vorteil hat, dass sich eine stetig differenzierbare Funktion ergibt, deren Ableitungen rechnerisch bestimmbar sind. Für die andere Funktion gilt dies nicht, was sich auch dadurch zeigt, dass das CAS des ClassPad keine Ableitungen bilden kann.

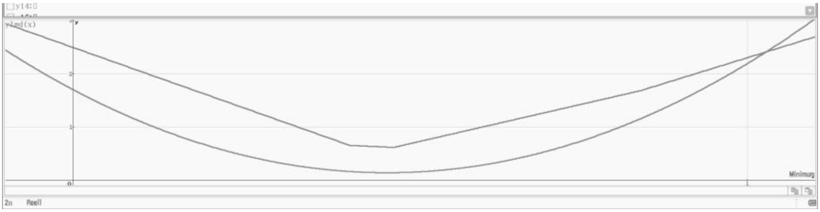


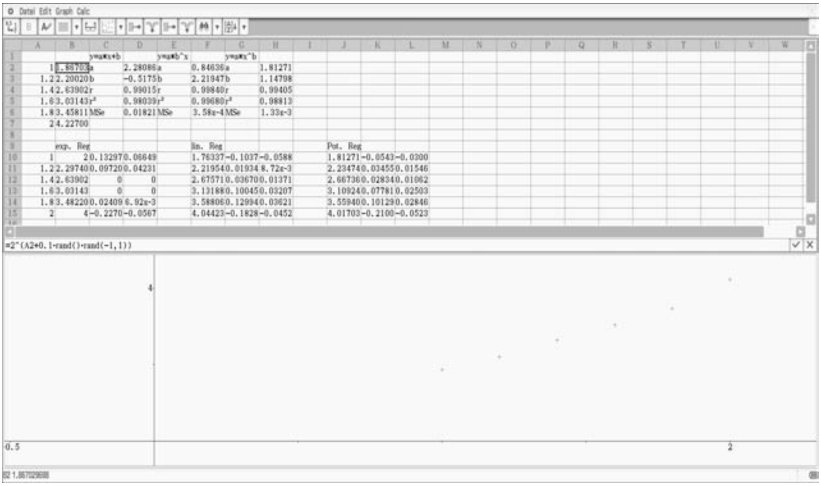
Abb. 7 Vergleich der Abstandssummen mit $M\left(\acute{x},\acute{y}\right)\in g$

Vergleich verschiedener Regressionen

Eine Fragestellung, die sich sowohl im Schulunterricht als auch im Allgemeinen stellt, ist die nach der Art der Regression, die zu wählen ist. Die sich damit ergebenden Probleme werden an Hand des folgenden Beispiels diskutiert. Ein funktionaler Zusammenhang ist dadurch gegeben, dass Wertepaare durch folgende Funktion erzeugt werden:

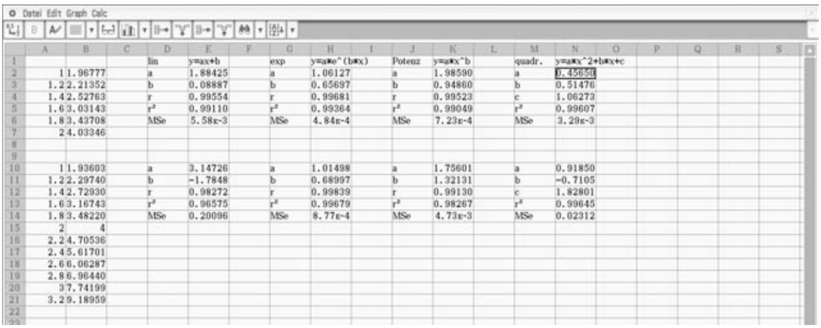
$$f(x)=2^{x+0{,}1\cdot rand(-1{,}1)\cdot rand()}$$

Es werden eine lineare, eine exponentielle und eine Potenzregression miteinander verglichen (s. Abb. 8). Es wird deutlich, dass im direkten Vergleich die exponentielle Regression die erzeugten Werte am besten repräsentiert, wie es auch zu erwarten war. Betrachtet man die Werte der linearen Regression, so ergibt sich auch hier eine relativ große Korrelation, und der mittlere Fehler (MSe) erscheint ohne Vergleich mit den anderen Regressionen relativ klein zu sein. Auch bezüglich der grafischen Darstellung würde man durchaus einen linearen Zusammenhang vermuten. Zur besseren Einschätzung für die Wahl der Regression besteht zum einen die Möglichkeit die Anzahl der Werte zu vergrößern oder den Fehler zu verkleinern, was in der Realität natürlich nicht immer machbar ist. Aus den Abbildungen 9 und 10 ist ersichtlich, dass beide Maßnahmen nicht unbedingt zu besseren Ergebnissen führen. Erleichtert wird die Wahl einer geeigneten Regression in der Realität natürlich, wenn ein theoretischer Hintergrund bekannt ist.



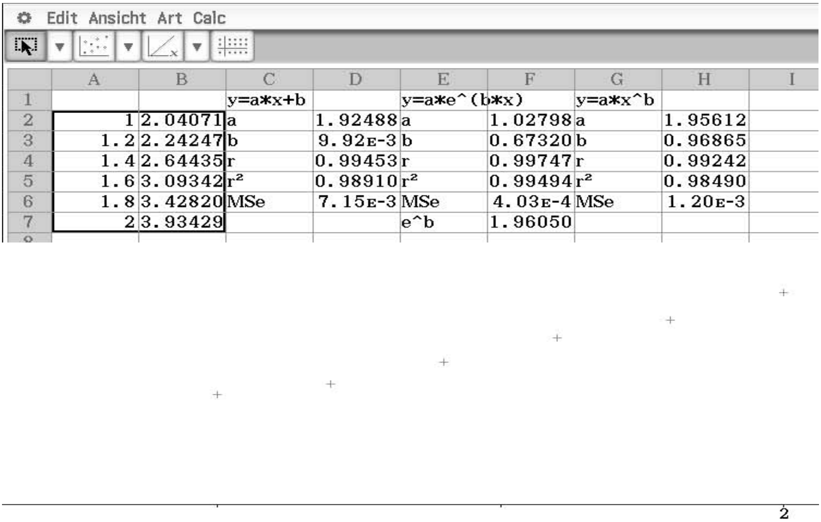
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1			y=a*x+b		y=a*b^x		y=a*x^b					
2	1	1.86703	a	2.28086	a	0.84636	a	1.81271				
3	1.2	2.20020	b	-0.5175	b	2.21947	b	1.14798				
4	1.4	2.63902	r	0.99015	r	0.99840	r	0.99405				
5	1.6	3.03143	r²	0.98039	r²	0.99680	r²	0.98813				
6	1.8	3.45811	MSe	0.01821	MSe	3.58E-4	MSe	1.33E-3				
7	2	4.22700										
8												
9		exp. Reg				lin. Reg				Pot. Reg		
10	1	2	0.13297	0.06649		1.76337	-0.1037	-0.0588		1.81271	-0.0543	-0.0300
11	1.2	2.29740	0.09720	0.04231		2.21954	0.01934	8.72E-3		2.23474	0.03455	0.01546
12	1.4	2.63902	0	0		2.67571	0.03670	0.01371		2.66736	0.02834	0.01062
13	1.6	3.03143	0	0		3.13188	0.10045	0.03207		3.10924	0.07781	0.02503
14	1.8	3.48220	0.02409	6.92E-3		3.58806	0.12994	0.03621		3.55940	0.10129	0.02846
15	2	4	-0.2270	-0.0567		4.04423	-0.1828	-0.0452		4.01703	-0.2100	-0.0523

Abb. 8 Vergleich verschiedener Regressionen



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1				lin	y=ax+b		exp	y=a*e^(b*x)		Potenz	y=a*x^b		quadr.	y=a*x^2+b*x+c
2	1	1.96777		a	1.88425		a	1.06127		a	1.98590		a	0.45650
3	1.2	2.21352		b	0.08887		b	0.65697		b	0.94860		b	0.51476
4	1.4	2.52763		r	0.99554		r	0.99681		r	0.99523		c	1.06273
5	1.6	3.03143		r²	0.99110		r²	0.99364		r²	0.99049		r²	0.99607
6	1.8	3.43708		MSe	5.58E-3		MSe	4.84E-4		MSe	7.23E-4		MSe	3.29E-3
7	2	4.03346												
8														
9														
10	1	1.93603		a	3.14726		a	1.01498		a	1.75601		a	0.91850
11	1.2	2.29740		b	-1.7848		b	0.68997		b	1.32131		b	-0.7105
12	1.4	2.72930		r	0.98272		r	0.99839		r	0.99130		c	1.82801
13	1.6	3.16743		r²	0.96575		r²	0.99679		r²	0.98267		r²	0.99645
14	1.8	3.48220		MSe	0.20096		MSe	8.77E-4		MSe	4.73E-3		MSe	0.02312
15	2	4												
16	2.2	4.70536												
17	2.4	5.61701												
18	2.6	6.06287												
19	2.8	6.96440												
20	3	7.74199												
21	3.2	9.18959												

Abb. 9 Verdopplung der zugrunde liegenden Werte



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			y=a*x+b		y=a*e^(b*x)		y=a*x^b		
2	1	2.04071	a	1.92488	a	1.02798	a	1.95612	
3	1.2	2.24247	b	9.92E-3	b	0.67320	b	0.96865	
4	1.4	2.64435	r	0.99453	r	0.99747	r	0.99242	
5	1.6	3.09342	r²	0.98910	r²	0.99494	r²	0.98490	
6	1.8	3.42820	MSe	7.15E-3	MSe	4.03E-4	MSe	1.20E-3	
7	2	3.93429			e^b	1.96050			

Abb. 10 Halbierung des Fehlers

Fazit

Insgesamt zeigt sich, dass der Einsatz digitaler Medien für ein erstes Erkunden sehr geeignet ist. Auf der anderen Seite sind aber Hinweise der Lehrperson absolut erforderlich. Des Weiteren ist es meines Erachtens unbedingt erforderlich, dass die Schülerinnen und Schüler dazu angehalten werden zu hinterfragen, was in den digitalen Medien im Hintergrund geschieht. Dazu ist es hilfreich, dass die komplex ausgeführten Operationen wie z. B. die Berechnungen vom Korrelationskoeffizienten und von der mittleren quadratischen Abweichung von den Schülerinnen und Schülern nachvollzogen werden. Der Mathematikunterricht könnte in diesem Sinne zu einem kritischen Umgang mit den digitalen Medien entscheidend beitragen.

Literatur

Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, Ch., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., Stachel, H. (1. kor. Nachdruck 2013) Mathematik, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Eichler, A., Vogel, M. (2009) Leitidee Daten und Zufall, Wiesbaden: Vieweg-Teubner

Engel, J. (2010) Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion, Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer

Fisz, M. (1980) Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Hischer, H. (2002). Mathematikunterricht und Neue Medien, Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker

Klemm, E. (2002). Einführung in die Statistik, Wiesbaden: Westdeutscher Verlag

Spiegel, M. R., Stephens, L., J. (2003). Statistik, Bonn: mitp-Verlag

Arbeitsgruppe „Lehrkräfte aus- und Fortbildung“
Ergebnisprotokoll

Teilnehmer: Matthias Gercken – Fabian Grünig – Anke Lindmeier – Anje Ostermann – Guido Pinkernell – Katalin Retterath – Reinhard Schmidt – Klaus P. Wolff

Einleitung

Der Diskussion der Arbeitsgruppe „Lehrkräfteaus- und -fortbildung“ lag die Hypothese zugrunde, dass eine gute Lehrkraft digitale Medien und insbesondere mathematische Werkzeuge reflektiert und kompetent für das fachliche Lehren und Lernen zu nutzen weiß. Diese Kompetenz ist wie alle anderen notwendigen Kompetenzen für die Planung und Reflexion guten Unterrichts in allen Phasen der Lehrerbildung zu entwickeln. Insbesondere beschäftigte sich die Arbeitsgruppe mit den folgenden Fragen: Welche Konzepte – phasenspezifisch, phasenübergreifend – gibt es? Welche Kompetenzen werden jeweils in den Blick genommen? Was ist eine gute Lehrerfortbildung? Nachfolgend sind die Ergebnisse unter drei Perspektiven zusammengefasst:

Die Perspektive „Medium“

Die sogenannten „neuen Technologien“ der achtziger Jahre des vergangenen Jahrhunderts sind so neu nicht mehr. Sie werden laufend durch immer neuere Formen digitaler Medien und Werkzeuge ersetzt. Für die Konzeption von Aus- und -Fortbildungen ist daher eine klare Differenzierung der Medien und ihrer Einsatzszenarien im Unterricht wichtig:

- Klarheit über Ziele des Einsatzes digitaler Medien und Werkzeuge: Die bekannte und bewährte Differenzierung zwischen Werkzeug und Lernumgebung ist hilfreich: Wird das digitale Artefakt als gestaltbares Werkzeug situativ durch den Lernenden genutzt, so ist etwa die Ausbildung heuristischer Fähigkeiten in Problem- und Modellierungssituationen bedeutsam. In der Nutzung prädefinierter Lernumgebung (z.B. Applets) mit eingeschränkter Gestaltungsmöglichkeit für den Lernenden in geführten Lernsituationen wird dagegen eher der Inhalt sowie die gezielte Manipulation der mathematischen Objekte durch den Lernenden in den Fokus genommen.

- Klarheit über Tätigkeiten des Einsatzes digitaler Medien und Werkzeuge: Zu unterscheiden sind zum Beispiel das Explorieren eines mathematischen Sachverhalts oder das Darstellen eines Sachverhalts oder auch das Auswerten und Verwerten von Daten.
- Klarheit über die Vielfalt der Lernformen, in denen der Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge eingebettet/verertet werden kann: Solche Lernformen können Webinare, Blended Learning Konzepte oder kollaborative Situationen sein.

Die Perspektive „Lehrkraft“

Aus Sicht einer Lehrkraft ist eine Fortbildung dann gut, wenn sie entlastet und dabei eine persönliche Weiterentwicklung ermöglicht. Die hieraus folgenden Anforderungen an die Konzeption einer Fortbildung gelten gleichermaßen auch für die Konzeption von Lehrveranstaltungen:

- Die Aus- und Fortbildung setzt an die Vorerfahrungen der Teilnehmenden an: Hierbei sind nicht nur die objektiven Merkmale der Zielgruppe zu berücksichtigen, sondern es sind auch die Erwartungen der einzelnen Teilnehmenden an die Veranstaltung zu eruieren, welche ggf. diesen Erwartungen entsprechend modifiziert werden kann.
- Die Aus- und Fortbildung ist daher von vorneherein so konzipiert, dass sie an die individuellen Bedürfnisse adaptiert werden kann: Insbesondere ist das Arbeitsmaterial modifizierbar. Dies geschieht etwa durch eine Modularisierung oder durch die Verwendung von „Blütenaufgaben“, die auch in Fortbildungen differenzierend wirken können: Innerhalb einer thematisch einheitlichen Aufgabe beschäftigen sich Teilaufgaben mit unterschiedlich herausfordernden Teilaspekten desselben Themas und können sogar – je nach Interessenlage – explizit zu möglichen Vertiefungen und Weiterentwicklungen des Themas auffordern.

- Die Aus- und Fortbildung lässt Raum für die individuelle Entwicklung: Entsprechend variables Aufgabenmaterial (s.o.) lässt dies ebenso zu wie eine entsprechende methodische Gestaltung. Aus der Realisierung individueller Interessen innerhalb des thematischen Rahmens der Fortbildung kann für die einzelne Teilnehmerin oder den einzelnen Teilnehmer eine neue Identifikation mit dem eigenen Fach entstehen.

Die Perspektive „Aus- und Fortbildung“

Jede einzelne Lehrveranstaltung und jede einzelne Fortbildung muss sich in das Medienkonzept des Fachs und der Institution einpassen. Dieses muss gleichzeitig die Anschlussfähigkeit über die Phasen der Lehrerbildung hinweg gewährleisten. Zwei Aspekte dieser Schnittstellenkompatibilität – fachdidaktische Grundlagen sowie Bedien- und Werkzeugkompetenzen – sind in allen drei Phasen der Lehrerbildung wie folgt konkretisierbar:

- Im Studium:
  - Aufbau theoretischer Grundlagen für eine reflektierte und differenzierte Planung des Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge in Lehr- und Lernsituationen. Ort dieses Kompetenzaufbaus sind fachdidaktische Lehrveranstaltungen.
  - Aufbau von Bedienkompetenz für exemplarische mathematischer Medien und Werkzeuge. Ort dieses Kompetenzaufbaus ist die Fachausbildung, denn das digitale Werkzeug muss wie jedes analoge Werkzeug Teil des fachlichen Arbeitens sein.
- Im Referendariat:
  - Theoriegeleitete Reflexion des Einsatzes digitaler Medien und Werkzeuge im Unterricht. Die im Studium erworbenen didaktischen Planungs- und Reflexionskompetenzen sind in der Praxisphase Basis für die Planung, Durchführung und Reflexion eigenen Unterrichts.
  - Ausbau von Bedienkompetenzen: Auf Basis der im Studium erworbenen exemplarischen Bedienkompetenzen entstehen weiterführende Bedienkompetenzen, deren Notwendigkeit

sich aus der Rückkopplung zu Unterrichtserfahrungen ergeben. Z.B. sind dies das Programmieren, Gestalten/Ändern und das Entwickeln von Lernumgebungen und Applets oder der Umgang mit typischen Bedienfehlern im Unterricht.

- In Fortbildungen: Mit Blick auf den derzeit unzureichenden „digitalen“ Ausbildungsstand vieler praktizierender Lehrkräfte sind hier nur Minimalziele formuliert, die sich an der Erwartung der Teilnehmenden hinsichtlich Praxisrelevanz orientieren:
    - Gleichzeitige Ausbildung sowohl theoretischer didaktischer Kompetenzen als auch Bedienkompetenzen sollen angestrebt werden. Diese werden an exemplarischen Einsatzbeispielen mit binnendifferenzierendem Potenzial konkretisiert, die sowohl neugierig machen als auch ohne Aufwand praktizierbar erscheinen („Mehrwertaufgaben“), und deren Nutzungsspektrum sich für Fortgeschrittene leicht erweitern lässt.

Hingewiesen wird abschließend auf gängige Modelle für die Konzeption von Fortbildungen, aus deren methodischem Arsenal je nach Kompetenzzielsetzung (Aufbau von Bedienkompetenzen, didaktischen oder fachlichen Kompetenzen) geeignet ausgewählt werden kann. Hierunter fallen etwa die Orientierung an expliziten Lernzielen, das implizite Lernen, oder das Meister-Lehrling-Modell.

Arbeitsgruppe "Denken - Sprechen - Verstehen" Ergebnisprotokoll

Teilnehmer: Florian Schacht – Olaf Grund – Thomas Janßen – Felix Johlke – Jürgen Roth – Ronny Sitter

Im Rahmen der Arbeitsgruppe wurde diskutiert, inwiefern sich die Verwendung spezifischer Eigenschaften digitaler Medien sowie die Kognition und Kommunikation über mathematische Lerngegenstände gegenseitig beeinflussen. Eine der Ausgangsfragen in diesem Zusammenhang war die Frage nach dem Einfluss von Interaktivität, Dynamik und Multimodalität auf mentale und sprachliche Repräsentationen mathematischer Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren. Die Arbeitsgruppe hat in diesem Zusammenhang unterschiedliche Herausforderungen identifiziert und diskutiert, die dabei aus mathematikdidaktischer Perspektive besonders bedeutsam erscheinen. Sie werden im Folgenden, vom Allgemeinen zum Spezifischen voranschreitend, vorgestellt.

1) Begriffsklärung

Sowohl in inter- als auch in innerdisziplinären Forschungszusammenhängen ist es eine zentrale Erfahrung, dass zunächst eine gemeinsame Sprache ausgehandelt werden muss, weil Fachbegriffe je nach Bezugsdisziplin und theoretischer Rahmung sehr unterschiedlich gebraucht werden. Es erscheint als wichtige Aufgabe, zunächst relevante (forschungs- und praxisbezogene) werkzeugbezogene Grundbegriffe zu identifizieren und herauszuarbeiten, wie sie in der Mathematikdidaktik, aber auch in Psychologie, Medienpädagogik oder Mensch-Computer-Interaktion gebraucht werden. Dies kann als Vorlage für Aushandlungsprozesse in kollaborativen Forschungszusammenhängen dienen, um eine begriffliche Vernetzung, Abgrenzung oder zumindest Transparenz zu erreichen.

2) Theoretische Vernetzung

Neben der begrifflichen Abgrenzung erscheint damit auch die theoretische Vernetzung als eine zentrale Herausforderung. Der theoretische Rahmen eines Forschungsprojektes entscheidet über die Perspektive, mit der die Forschungsgegenstände betrachtet werden und vor deren Hintergrund forschungsbasierte Entwicklungsarbeit vorangetrieben wird. Gerade in interdisziplinären Forschungszusammenhängen ist es daher von besonderer Bedeutung, die jeweiligen Hintergrundannahmen der zugrundeliegenden disziplinbezogenen Theorien explizit zu machen, um diese Theorien miteinander vergleichen, gegeneinander abgrenzen oder miteinander verknüpfen zu können. Vorbildhaft kann dabei das in Bikner & Prediger (2014) beschriebene Vorgehen der Vernetzung von Theorien sein.

3) Forschung und Entwicklung im Spannungsfeld Lernende - Medium

Im Bereich der mathematikdidaktischen Lehr- und Lernforschung können zwei Denkrichtungen unterschieden werden, zwischen denen sich Forschungs- und Entwicklungszusammenhänge bewegen.

a) Inwiefern beeinflussen mathematische Denk- und Handlungsweisen die Beschaffenheit und Nutzung digitaler Werkzeuge?

Ausgehend von der Analyse mathematischer Gegenstände lassen sich Anforderungen oder Designprinzipien für die Beschaffenheit und Nutzung digitaler Werkzeuge formulieren.

b) Inwiefern ändern die Beschaffenheit und Nutzung digitaler Werkzeuge mathematische Denk- und Handlungsweisen?

Weiterhin können (neue) digitale Werkzeuge Potentiale für den Mathematikunterricht bereithalten, die hinsichtlich ihrer Auswirkungen auf mathematische Denk- und Handlungsweisen der Lernenden hin beforscht werden können.

4) Werkzeugbezogene Lehr- und Lernforschung

Abbildung 1 verdeutlicht grundlegende Zusammenhänge werkzeugbezogener Lehr- und Lernforschung im Spannungsfeld von Mathematik, Medien, Sprache und Denken. Grundlage bilden mathematische Gegenstände, die in inner- und außermathematischen Situationen erlernt werden. Da mathematische Objekte theoretischer Natur sind, sind vermittelnde Objekte – Medien – unabdingbar. Dazu zählen Computerwerkzeuge ebenso wie Sprache als Medien der (externen) Repräsentation mathematischer Begriffe. Mathematische Lernprozesse sind demnach medial vermittelt und wesentlich beeinflusst durch Lernsituation und mathematischen Gegenstand. Insofern sind von diesen auch (je nach lerntheoretischem Zugriff) individuelle Verstehens- und Denkprozesse, individuelle mentale Repräsentationen oder diskursiv geteiltes Wissen hochgradig abhängig.

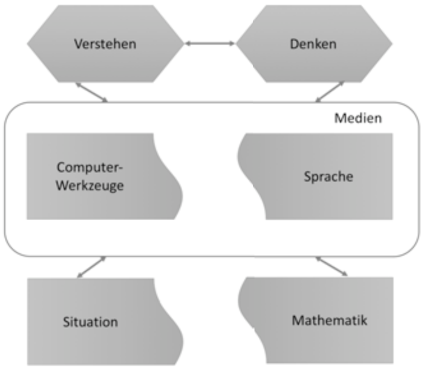


Abb. 1: Grundlegende Zusammenhänge werkzeugbezogener Lehr- und Lernforschung

5) Best Practice und negative Ergebnisse

Abschließend soll hervorgehoben werden, dass nicht nur die Darstellung besonders gelungener Beispiele für die Nutzung digitaler Werkzeuge im Unterricht wichtig ist, sondern auch die Darstellung von Grenzen ihres Einsatzes. Dabei ist zunächst offen/noch zu klären, welche Kommunikations- (etwa im Rahmen von Lehrerfortbildungen, durch Gütesiegel) und Publikationswege gewählt werden sollten, um möglichst breit zu informieren.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A., Prediger, S. (2014) (Eds.). Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Cham: Springer International Publishing.

Arbeitsgruppe „Inhalte und Prozesse“
Ergebnisprotokoll

Teilnehmer: Hans-Georg Weigand – Henning Körner – Jens Weitendorf – Elena Jedtke – Felicitas Pielsticker – Martin Epkenhans – Tobias Mai

Ausgangshypothesen:

1. Neue technische Möglichkeiten regen an, nach neuen Zugängen zu einzelnen mathematischen Begriffen, Verfahren, Inhalten, Prozessen zu suchen
2. Mit der Verfügbarkeit von Laptop, Tablet, Smartphone, Internet wächst die Formenvielfalt digitalen Lernens: Software, Lehr-Lernumgebungen, Augmented Reality, Open Educational Ressources, Internetplattformen

Ausgangsfragen:

Zu 1. Welche neuen Ideen, Materialien, Überlegungen zu einzelnen Lerngegenständen gibt es? Welche Tendenzen lassen sich inhaltübergreifend identifizieren?

Zu 2: Welche Werkzeuge werden in Zukunft eine größere Bedeutung erlangen? Welche Trends gibt es gegenwärtig? Welche Standards können Qualität sichern?

Die Arbeitsgruppe hat zunächst einige weitere Hypothesen aufgestellt bzw. präzisiert, um die Denk- und Arbeitsrichtung für zukünftige Überlegungen vorzugeben. Dann wurden diese Überlegungen anhand des Inhalts „Quadratische Funktionen“ exemplarisch konkretisiert.

Hypothesen für zukünftige Denk- und Arbeitsrichtung im Hinblick auf den Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht

1. Im Mittelpunkt der Überlegungen müssen die kanonischen Inhalte des Mathematikunterrichts stehen.

Dabei gilt es, die in den letzten Jahrzehnten erarbeiteten Prinzipien des Werkzeugeinsatzes kritisch zu reflektieren und weiterzuentwickeln. Stichworte hierzu sind u. a.:

- Darstellungsvielfalt – Term, Tabelle, Graph – konstruktiv und sinnvoll einsetzen.
- Anwendungsaufgaben sowohl hinsichtlich der Anwendungssituation als auch bzgl. des Verständnisses mathematischer Begriffe reflektieren.
- Die Theorie der „Instrumental Genesis“ sinnvoll umsetzen.

2. Das mathematische Arbeiten und Denken im Mathematikunterricht verschiebt sich vom operativen zum inhaltlichen Verständnis:

- Es ergibt sich die Chance, das eigentliche mathematische Arbeiten (Begriffe entwickeln, Zusammenhänge aufzeigen, Begründungen und Beweise geben) stärker in den Vordergrund zu rücken.
- Neuere Programme wie etwa 3D-Programme können diesen Prozess unterstützen.
- Es muss stets aber auch die Unterrichtsrealität vor allem hinsichtlich Prüfungssituationen mitbedacht werden.

3. Die neuen Visualisierungsmöglichkeiten müssen für neue Zugänge zu mathematischen Begriffen und Verfahren genutzt werden:

- DGS ermöglicht durch Dynamik und Interaktivität Entdeckungen und neue Problemstellungen zu finden.
- Beweise sind für Schülerinnen und Schüler oft schwer nachvollziehbar. Für die Nachhaltigkeit ist es aber erforderlich, dass die Lernenden von der Richtigkeit einer Aussage überzeugt

sind. In diesem Zusammenhang sind DGS hilfreich. Beweise dienen dann dazu zu klären, warum etwas richtig ist und nicht nur, dass eine Aussage korrekt ist.

- 3D-Grafiken unterstützen die Raumanschauung. Es ist noch eine offene Frage, inwieweit und für welche Begriffe und Verfahren das im Mathematikunterricht sinnvoll genutzt werden kann.

4. Es kommt auf eine stärkere Vernetzung der mathematischen Inhalte an. Hierzu einige Beispiele:

- Funktionales Denken mit CAS:

  (1) F(a,b)=a·b statt F=a·b stellt den funktionalen Charakter des Terms besser heraus.

  (2) Selbstdefinierte Makros können als mehrstellige Funktionen konstruiert werden (z. B. Gerade durch zwei Punkte)

  (3) Stochastik: Verteilungen werden als mehrstellige Funktionen deutlich: binompdf(n,p,k).

- Tabellenkalkulation kann funktionales Denken fördern, indem der Zellbezug als funktionale Zusammenhänge deutlich herausgestellt wird.
- In DGS werden geometrische Konstruktionen algebraisiert (Descartessches Prinzip der Analytischen Geometrie).

5. Es bedarf keiner gesteigerten Vielfalt an Programmen (Software) im Unterricht:

- Die zentralen Programme sind – nach wie vor – Computeralgebrasysteme, Funktionenplotter, Dynamisches Geometrie Systeme (auch in 3D) und Tabellenkalkulationsprogramme sowie eine interaktive Vernetzung dieser Programme.
- Für die interaktive Vernetzung der genannten Programme stehen verschiedene (Online-)Umgebungen zur Verfügung, wie zum Beispiel Moodle oder Lernpfade in verschiedenen Lernumgebungen, etwa Moodle oder ILIAS.

6. Es sind kritisch die Grenzen von Hard- und Software zu reflektieren:

- Die Zahldarstellungen im Rechner sind stets nur diskret möglich und besitzen betragsmäßig sowohl eine obere als auch eine untere Grenze.
- Diese Grenzen sollten sowohl in der fachdidaktischen Forschung als auch von Lehrkräften und beim Einsatz von Rechnern im Unterricht reflektiert werden.

Ein Beispiel: Quadratische Funktionen

1. Was bleibt auch weiterhin im Rahmen von „Quadratischen Funktionen“ bedeutsam und wichtig?

- Auch ohne digitale Werkzeuge gilt es rein quadratische und einfache allgemeine quadratische Gleichungen lösen zu können.
- Das Prinzip der Umformung der allgemeinen Form der quadratischen Funktion in die Scheitelpunktform muss verstanden sein.
- Die Bedeutung der Parameter sowohl in der AF als auch der SPF müssen inhaltlich – in ihrer Auswirkung auf die Veränderung der Graphen – erkannt werden.
- Die Lösungsformeln für quadratische Gleichungen erhalten eine andere Bedeutung: Es geht nicht so sehr um das explizite numerische Berechnen der Lösungen, als vielmehr um das Erkennen von Lösbarkeit und Lösungsvielfalt sowie das Erkennen des Zusammenhangs zwischen algebraischen Formeln („pq-“ oder „abc-Formel“) und graphischen Darstellungen in Form von Parabeln.

2. Welche Veränderungen bringt der Einsatz digitaler Werkzeuge mit sich?

- Das funktionale Denken erhält eine größere Bedeutung, etwa durch:
    - funktionale Makro-Konstruktionen (Baustein): f(x,a,b,c) := …

  - Vernetzen von Algebra und Geometrie, etwa durch die funktionale Betrachtung der Kreisflächenformel: $A(r) := r^2 \cdot \pi$.

- Quadratische Funktionen eröffnen neue Möglichkeiten als Werkzeug zum Modellieren oder bei der Kurvenanpassung an Daten, auch durch Regressionsrechnung. Dadurch können offenere Aufgabenstellungen zu spezifischen Modellierungen verwendet werden.

- Das Lösen quadratischer Gleichungen wird
  - auf der numerischen Ebene
  - auf der symbolischen Ebene

  automatisiert. Dadurch gewinnen die Interpretationen der Ergebnisse eine größere Bedeutung.
- Es erschließt sich eine größere Vielfalt an Anwendungsaufgaben, etwa auch durch Anpassung von Kurven an vorgegebene Graphen.
- Die Dokumentation der Lösungen erhält eine neue/andere Bedeutung, indem größere Rechenschritte im Rechner verborgen bleiben (an den Rechner ausgelagert werden) und verbal in einem größeren Zusammenhang beschrieben werden müssen.

3. Notwendige Aufgaben und Tätigkeiten

- SuS sowie LuL müssen vom Mehrwert des Werkzeugeinsatzes, bei gleichzeitiger Transparenz der Grenzen, überzeugt werden.
- Vorhandene Lehrpläne sind im Hinblick auf den Werkzeugeinsatz kritisch zu reflektieren. Insbesondere gilt es, auch Fähigkeiten und Fertigkeiten im Rahmen eines nachhaltigem Übens (regelmäßige „Kopfübungen“ zu Grundwissen etc.) auch hilfsmittelfrei zu entwickeln.
- Es bedarf empirischer Untersuchungen hinsichtlich der Wirkung des Werkzeugeinsatzes.
- Es bedarf der Konstruktion substantieller Lernumgebungen für den Werkzeugeinsatz.

Insgesamt scheint es, dass viele konstruktive Ideen im Hinblick auf neue Zugänge zu mathematischen Begriffen, Verfahren, Inhalten und Prozessen in den letzten Jahren und Jahrzehnten entwickelt wurden und dass sie nichts von ihrer Aktualität eingebüßt haben. Es kommt jetzt vielmehr darauf an, diese Ideen im Unterricht auch adäquat zu entwickeln und zu zeigen, dass ein Mehrwert damit verbunden sein kann, der sich im besseren Verständnis der mathematischen Grundlagen zeigt. Im Englischen hat sich hierfür der Ausdruck „scaling up“ eingebürgert. Die Ergebnisse langfristiger empirischer Untersuchungen, wie etwa „Calimero“ (Ingelmann 2009) oder „M3“ (Bichler 2010), geben durchaus Anlass zu Hoffnung, warnen aber auch davor, dass sich Veränderungen im Unterricht und bei Prüfungen nur dann einstellen, wenn der Einsatz digitaler Technologien theorie- und strategiebasiert erfolgt. Dies ist wohl die zentrale Aufgabe der nächsten Jahre.

Literatur:

Barzel, B. (2012). Computeralgebra im Mathematikunterricht: Ein Mehrwert – aber wann? Münster: Waxmann.

Bichler, E. (2010). Explorative Studie zum langfristigen Taschencomputereinsatz im Mathematikunterricht. Hamburg: Kovac.

Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., Weigand, H.-G. (2015). Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin, Heidelberg: Springer

Ingelmann, M. (2009). Evaluation eines Unterrichtskonzeptes für einen CAS-gestutzten Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Berlin: Logos.Adressen der Autoren

Adressen der Autorinnen und Autoren

Dr. Thomas Borys
Institut für Mathematik und Informatik
Pädagogische Hochschule Karlsruhe
Bismarckstr. 10
76133 Karlsruhe
borys@ph-karlsruhe.de

Prof. Dr. Joachim Engel
Institut für Mathematik und Informatik
Pädagogische Hochschule Ludwigsburg
Reuteallee 46
71638 Ludwigsburg
engel@ph-ludwigsburg.de

Dr. Thomas Janßen
AG Didaktik der Mathematik
Universität Bremen
Bibliothekstraße 5
28359 Bremen
janssent@uni-bremen.de

Elena Jedtke
Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fliednerstraße 21
48149 Münster
e.jedtke@uni-muenster.de

Felix Johlke
Fachbereich Mathematik, AG Didaktik
Technische Universität Darmstadt
Schlossgartenstr. 7
64289 Darmstadt
johlke@mathematik.tu-darmstadt.de

Henning Körner
Studienseminar Oldenburg für das Lehramt an Gymnasien
Birkenweg1
26127 Oldenburg

Michaela Lichti
Graduiertenkolleg „Unterrichtsprozesse“
Universität Koblenz-Landau, Campus Landau
Thomas-Nast Str. 44
76829 Landau
lichti@.uni-landau.de

Prof. Dr. Anke Lindmeier
Didaktik der Mathematik
IPN – Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik
Olshausenstr. 62
24118 Kiel
lindmeier@ipn.uni-kiel.de

Tobias Mai
Institut für Mathematik
Universität Paderborn
Warburger Straße 100
33098 Paderborn
tmai@math.uni-paderborn.de

Anje Ostermann
Didaktik der Mathematik
IPN – Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik
Olshausenstraße 62
24118 Kiel
ostermann@ipn.uni-kiel.de

Prof. Dr. Guido Pinkernell
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Institut für Mathematik und Informatik
Im Neuenheimer Feld 561
69120 Heidelberg
pinkernell@ph-heidelberg.de

Prof. Dr. Jürgen Roth
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Institut für Mathematik
Fachbereich 7: Natur und Umweltwissenschaften
Universität Koblenz-Landau, Campus Landau
Fortstr. 7
76829 Landau
roth@uni-landau.de

Prof. Dr. Florian Schacht
Universität Duisburg-Essen
Didaktik der Mathematik
Thea-Leymann-Straße 9
45127 Essen
florian.schacht@uni-due.de

Reinhard Schmidt
Seminar für Gymnasien und Gesamtschulen
ZfsL Engelskirchen
Hindenburgstraße 28
51766 Engelskirchen
schmidt@seminargyge.de

Dr. Jens Weitendorf
Am Forstteich 4E
22850 Norderstedt
JWeitendorf@t-online.de

Andreas Filler,
Mathias Ludwig,
Reinhard Oldenburg (Hrsg.)

Werkzeuge im Geometrieunterricht

Vorträge auf der 29. Herbstagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
vom 10. bis 12 September 2010 in Marktbreit

204 Seiten, DIN A5, br.
ISBN 978-3-88120-587-0
22,80 Euro

AK Geometrie 2010

Andreas Filler,
Matthias Ludwig (Hrsg.)

Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht

Ziele und Visionen 2020

Vorträge auf der 28. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
vom 09. bis 11. September 2011 in Marktbreit

2012, 196 Seiten, DIN A5, br.,
ISBN 978-3-88120-588-7,
22,80 Euro

AK Geometrie 2011

AK Geometrie 2012

Andreas Filler,
Matthias Ludwig (Hrsg.)

Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht

Ziele und Visionen 2020

Vorträge auf der 29. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken

196 Seiten, DIN A5, br.,
ISBN 978-3-88120-589-4,
22,80 Euro

AK Geometrie 2014

Andreas Filler,
Anselm Lambert (Hrsg.):

Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen - Raumgeometrie

Vorträge auf der 31. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 12. bis 14. September 2014 in Saarbrücken

128 Seiten, DIN A5, br.,
ISBN 978-3-88120-590-0,
22,80 Euro