Guido Pinkernell
Florian Schacht (Hrsg.)

Digitalisierung fachbezogen gestalten

Arbeitskreis
Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge
in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

Herbsttagung
vom 28. bis 29. September 2018 an der
Universität Duisburg-Essen

1. Auflage Februar 2019
Veröffentlicht im Verlag Franzbecker
Hildesheim

ISBN 978-3-88120-142-1

Guido Pinkernell, Florian Schacht (Hrsg.)

Digitalisierung fachbezogen gestalten

Arbeitskreis Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge
in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

Herbsttagung
vom 28. bis 29. September 2018
an der Universität Duisburg-Essen

www.franzbecker.de

Vorwort

Die Diskussion um die Gestaltung der Umsetzungsprozesse von Digitalisierung im Bildungsbereich ist hochaktuell. In einigen Ländern werden erste Überarbeitungen der Curricula vorbereitet, auch die KMK nimmt sich dieser selbstgesetzten Aufgabe verstärkt an. Nachdem auf der Herbsttagung 2017 des Arbeitskreises in Heidelberg ein Diskussionsprozess um die fachdidaktische Perspektive auf den Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge im Mathematikunterricht angestoßen wurde, konnte die Herbsttagung 2018 des Arbeitskreises Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge daran anknüpfen. Im Zentrum der Herbsttagung standen daher unter anderem die folgenden Fragen:

- Wie kann Digitalisierung fachbezogen gestaltet werden?
- Welche unterrichtlichen Konzepte können dazu beitragen?
- Welche innovativen Forschungsfelder können vor diesem Hintergrund erschlossen werden?
- Welche Konsequenzen ergeben sich für die Aus-, Fort- und Weiterbildung?
- Welche Gelingens- und Randbedingungen sind für die Gestaltung notwendig?
- Welche Synergieeffekte können durch Vernetzungsmöglichkeiten innerhalb der GDM genutzt werden?

Die vielfältigen Beiträge der Herbsttagung sind in diesem Band zusammengefast. Insgesamt haben 45 Teilnehmer*innen die Tagung mit ihren Impulsen bereichert, davon viele mit eigenen Forschungs-, Entwicklungs- und Praxisbeiträgen.

Wir danken an dieser Stelle insbesondere allen Autor*innen sowie allen Gutachter*innen, die sich an der Erstellung dieses Bandes beteiligt haben.

Essen, im März 2019

Guido Pinkernell und Florian Schacht

Inhaltsverzeichnis

Digitalisierung als Herausforderung an Mathematikdidaktik – gestern. heute. morgen

Bärbel Barzel

Der Einsatz digitaler Medien ist seit vielen Jahren ein relevantes und spannendes Thema für das Lernen und Lehren von Mathematik – in der Forschung wie in der Unterrichtspraxis. Dabei sind es verschiedene Fragen, die umtreiben: Um welche Medien handelt es sich genau? Wie werden diese im Lehr-Lern-Prozess am sinnvollsten eingebunden? Welcher Mehrwert lässt sich für das fachliche Lernen und Lehren erkennen? Der Blick zurück (Kapitel 1) dient immer retrospektiv als wichtiges Fundament, um das Aktuelle, den Status Quo (Kapitel 2) zu erfassen und zu verstehen. Beides dient als Vergewisserung und Absicherung mit Blick aufs Zukünftige, für die Ideen des „Quo vadis?“ (Kapitel 3).

Es sind vielfältige und unterschiedliche Medien, die für Mathematikunterricht relevant sind. Relevant heißt hier, dass sie einen Beitrag leisten können zu den Kompetenzen, die im Mathematikunterricht erworben werden sollen, wie sie beispielsweise in den Bildungsstandards festgeschrieben sind (z.B. KMK, 2004). Nicht nur allgemeine digitale Medien für Kommunikation und Präsentation, sondern insbesondere auch mathematikspezifische digitale Medien sind hier zu nennen. Die folgende Tabelle zeigt einen Überblick über die Bandbreite dieser für Mathematikunterricht wichtigen Medien[1] entstanden.

1 Dieser Überblick ist zusammen mit Ulli Kortenkamp entstanden und wurde beim gemeinsamen Hauptvortrag bei der DZLM-Jahrestagung 2017 in Saarbrücken präsentiert, vgl. www.dzlm.de.

Medien	**Allgemein**	**Mathematikspezifisch**
An Beruf und Alltag orientiert	Kommunikation (Internet- und Netzwerkforen) Präsentation (z.B. ppt, prezi,...) Dokumentation (in: Wort/ Audio/ Foto/ Video) Recherche (Internet)	Tabellenkalkulation (z.B. Excel) „große CAS“ (z.B. Maple, mathematica) Statistiktools (z.B. SPSS) Tools zur Messwerterfassung
Didaktisch orientiert	Digitale Schulbücher Erklär-Videos, Tutorielle Systeme Lernpfade, Lernumgebungen, Apps Lernplattformen (Moodle) Audience Response Systeme	Dynamische Geometriesoftware (z.B. Geogebra, TI-Nspire, Classpad) Funktionenplotter oder „kleine CAS“ (z.B. Geogebra, TI-Nspire, Classpad) Stochastiktools (z.B.Fathom, Tinkerplots, TI-Nspire)

Gestern - Retro spectare?

Die Frage danach, wie digitale Medien in den Mathematikunterricht zu implementieren sind, ist nicht neu. Dabei standen zunächst nur die mathematikspezifischen digitalen Werkzeuge im Fokus. Seit 1980 beschäftigen wir uns in Deutschland zum Beispiel mit der Frage, wie neben Computeralgebrasystemen (CAS) auch Geometrieprogramme, Funktionen-plotter, Tabellenkalkulation und Stochastiktools so in den Unterricht einzubeziehen sind, dass ein Mehrwert für das Lernen entsteht. In den 1980er und 1990er Jahren waren diese Diskussionen in Deutschland vor allem durch einzelne Lehrpersonen geprägt, die pioniermäßig praktische Unterrichtserfahrungen im Unterricht sammelten und anderen auf Tagungen und in Lehrerfortbildungen berichteten. Wissenschaftliche Begleitung und Unterstützung war dabei nur punktuell vorhanden. So gab es erste Studien zum Einsatz von Funktionenplottern (vor allem als grafikfähige Taschen-rechner, z.B. Hentschel/Pruzina, 1995) sowie Untersuchungen zum Einsatz von Geometriesoftware (z.B. Hölzl, 1999, Sträßer, 1992) und zum Einsatz von Stochastiktools (Biehler, 1985). Anders in anderen Ländern, wo schon sehr früh seit den 1980er Jahren eine Fülle an verschiedenen Forschungen zum Einsatz grafikfähiger Tools und CAS entstand (z.B. in den Niederlanden, in Frankreich, Australien, UK, USA oder Mexiko – vgl. Lagrange et al., 2003). Mittlerweile hat sich das Bild in Deutschland glücklicherweise gewandelt. und es gibt auch in Deutschland Erkenntnisse aus mehreren groß angelegten und langfristigeren Studien zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge, z.B. zu Computeralgebra (Ingelmann & Bruder 2007,;Weigand & Bichler, 2009; Barzel, 2006,; Rieß, 2018) oder zu Stochastiktools (Biehler, 2019).

Die zentralen Ergebnisse liegen neben vielen Detailerkenntnissen vor allem im Potenzial des schnellen Repräsentationswechsels und der schnellen Beispielgenerierung, wodurch konzeptuelles Lernen unterstützt werden kann (z.B: durch Aufgaben zum Entdecken von Mustern und Strukturen) (Barzel, 2012). Das Entfalten dieses Potenzials hängt jedoch nicht nur von der Präsenz des Mediums ab, sondern vor allem davon, wie das Medium eingesetzt wird – mit welcher Aufgabenstellung es verknüpft und in welches Lernsetting es eingebunden ist. Es ist die Lehrperson, die wesentlich Einfluss darauf hat, ob Technologieeinsatz zu positiven Lerneffekten führt (Yerushalmy & Botzer, 2011). Schon sehr früh wurde deutlich, dass genau hierin auch eines der wesentlichen Probleme für eine breite Dissemination der Technologie liegt. Erfahrene Lehrpersonen haben Unterrichtsroutinen, die durch den Einsatz von CAS gestört werden (z.B. Lagrange 2003, Ball 2014). Neueste Studien zeigen, dass es deshalb unabdingbar ist, Lehrkräfte nicht nur mit guten Unterrichtsmaterialien zu versorgen, sondern ihnen im rahmen von Profesisonlaisierungsmaßnahmen ihnen Wege eröffnet werden müssen, ihre Routinen vielfältig zu reflektieren und vor allem ihnen Erlebnisse eines Selbstwirksamkeitserlebens auch bei neuen Routinen zu ermöglichen (Thurm, erscheint 2019)

In der Forschung gilt als eine der wichtigsten theoretischen Grundlagen, um die Lehr-Lern-Prozesse bei der Nutzung digitaler Werkzeuge besser zu verstehen, das Konzept der instrumentalen Genese (Drijvers & Trouche, 2008). Hier liegt der Fokus auf dem Akt der Aneignung, wenn ein Nutzer sich ein „Artefakt“ so zu eigen macht, dass es zu einem „Instrument“ für das Lernen wird, um die eigenen mathematischen Handlungen und Intentionen zu stützen. Dabei kann die Einflussnahme in zweierlei Hinsicht erfolgen, der oder die Lernende wird durch die Vorgaben des Artefakts geleitet, z.B: wenn bei der Eingabe eines Funktionsterms beim Modellieren eine passende Skalierung automatisch angeboten und nicht selbst entwickelt wird. Umgekehrt kann man als Nutzer/in ein Werkzeug in gewissem Rahmen gestalten, z.B. durch das Erstellen von Makros. Das Medium bekommt dabei in begrenztem Maße eine persönliche Note und ist nach den individuellen Anforderungen gestaltet. Dieses Wechselspiel bezeichnen Hoyles & Noss (2003) als „instrumentation“ und „instrumentalization“, um in Analysen die Einflussnahme des Mediums auf den Lernprozess leichter fassen und die Wirkweise und Wirkrichtung besser rekonstruieren zu können. Auch wenn je nach Studieninteresse andere Theorien genutzt werden, so spielt die Theorie der instrumentalen Genese eine zentrale Rolle im Bereich des Technologieeinsatzes beim Lernen und Lehren von Mathematik.

Fasst man die Retrospektive zusammen, so zeigt sich im Bereich der Forschung, dass Theoriebildung stattgefunden hat, wichtige Erkenntnisse zum Lernen und Lehren mit digitalen Medien sich aus verschiedenen Studien als Ergebnisse benennen lassen. Dennoch ist zu konstatieren, dass noch zu wenig empirische Evidenz vorliegt, um von einem Mehrwert des Rechnereinsatzes generell sprechen zu können.

In der Praxis gibt es eine Fülle punktueller Entwicklungen von Aufgaben und teils auch Unterrichtssequenzen, allerdings ist noch keine breite Umsetzung in der Unterrichtspraxis zu verzeichnen (Bos et al., 2016).

Heute – Status Quo?

Aktuell wird Digitalisierung als zentrale Herausforderung an Bildung diskutiert. Dabei ist das bereits beschriebene *Lernargument,* dass digitale

Medien eingesetzt werden sollen, da sie das Potenzial für effektivere Lernprozesse besitzen (Drijvers et al., 2016) nur eines der beiden zentralen Argumente. Das andere ist das *Bildungsargument*. Kompetenzen im Umgang mit digitalen Medien gehören aktuell wie auch zukünftig zum beruflichen und privaten Alltag, weshalb hier eine angemessene Bildung realisiert werden muss (BMBF, 2016). Bund und Länder haben eine Grundgesetzänderung erwirkt (Februar 2019), um eine umfassende digitale Ausstattung an den Schulen als gemeinschaftliche Aufgabe zu meistern. Die inhaltliche Zielsetzung dieses politischen Bestrebens ist im Strategiepapier der KMK „Bildung in der digitalen Welt" (KMK, 2016) ausgeführt. So müssen *„Lehrkräfte [..] mit den Medien und Medientechnologien kompetent und didaktisch reflektiert umgehen können*" (KMK, 2012, S. 7). Dabei besitzt *„jedes Fach [..] spezifische Zugänge zu den Kompetenzen in der digitalen Welt durch seine Sach- und Handlungszugänge"* (KMK, 2016, S. 7).

Im Strategiepapier der KMK (2016) werden fächerübergreifend Kompetenzbereiche genannt, die fachspezifisch noch zu füllen sind. Eine solche inhaltliche Orientierung tut dringend Not, denn das Internet bietet mittlerweile eine Fülle an sehr diversen, kaum kritisch geprüften Angeboten für Schülerinnen und Schüler, die vielfach allgemein- und fachdidaktischen Ansprüche außer Acht lassen. So finden sich viele freie Erklärvideos oder Computeralgebra-Apps zu Lösen von Gleichungen, die häufig auf ein rezepthaftes Kalkülwissen reduziert sind ohne Elemente von Verstehen, Vorstellungs- oder Bedeutungsaufbau. Die hohen Nutzungszahlen solcher Angebote zeigen, dass gerade diese Art von Wissen von Schülerinnen und Schülern „gebraucht" wird, was die bedauerliche Vermutung nahelegt, dass dieses rein deklarative Wissen zu den unterrichtlichen Anforderungen passt.

Deshalb verwundert es nicht und ist zu begrüßen, dass die politischen Bestrebungen nicht nur die technische Ausstattung im Blick haben sondern ebenso eine gute Unterstützung und Professionalisierung von Lehrkräften fokussiert, damit der Unterricht vor dem Hintergrund der digitalen Möglichkeiten reflektiert, verändert und den neuen Zielsetzungen angepasst werden kann. Auch wenn hier Forschung und Universität gefragt sind, steht einer fundierten Designentwicklung und Implementationsforschung die Kurzfristigkeit der Bedarfe in der Schulpraxis entgegen. Hier gilt es, von

Seiten der Hochschulen adäquate Angebote mit zu tragen, regional zu unterstützen und gezielt neu zu entwickeln, so wie im Deutschen Zentrum für Lehrerbildung (DZLM, www.dzlm.de) geschieht. Hier arbeiten mehrere Hochschulen im Verbund, um Materialien und Konzepte für Professionalisierung in Mathematik zu entwickeln, der Fortbildungslandschaft zur Verfügung zu stellen und durch einschlägige Forschungsprojekte zu begleiten.

Auch wenn man die aktuellen Entwicklungen aufgrund des Wildwuchses an eher transmissiv strukturierten Materialien und Medien im Internet bedauern kann, da Denkstrukturen gefördert werden, die im Mathematikunterricht gerade überwinden sollte, so weitet sich aktuell doch der Blick. Und das ist zu begrüßen, denn mit der Diskussion um Medien, kann sich auch der Blick auf Unterrichtsentwicklung weiten. Denn jegliche Medien sollten die Denkformen unterstützen und vielleicht auch neu ermöglichen, die ein Verstehen von Mathematik befördern. Dazu ist es erfreulich, dass aktuell nicht nur digitale Mathematikwerkzeuge betrachtet, sondern alle relevanten Medien für Mathematikunterricht mit dem Ziel einer sinnvollen Integration einbezogen werden. Zu hoffen und zu unterstützen ist, dass in den aktuellen Diskussionen um Digitalisierung im Mathematikunterricht fachdidaktisch etablierte Grundsätze nach sinnvollen Wegen des Mathematiklernens neu belebt werden. Konkret kann Digitalisierung genutzt werden, eher genetische Zugänge, inhaltliches Denken und einen fundierten Vorstellungsaufbau als Grundlage des Kalküls zu realisieren als alleine auf eine einseitige Kalkülorientierung zu setzen (Vollrath, 2001; Prediger, 2009; Glade, 2016).

Morgen – Quo vadis?

Die Idee, die Herausforderung der Digitalisierung in den Dienst einer guten Unterrichtsentwicklung im Fach zu stellen, trägt auch die Vision für morgen.

Wir brauchen klare Qualitätskriterien und –standards für Technologie beim Lernen und Lehren von Mathematik für Auswahl und Produktion von Materialien & Medien, um so dem Wildwuchs transmissiver Kalkülorientierung entgegen zu wirken. Wir brauchen eine gute Unterstützung von

Lehrkräften durch qualitativ hochwertige Professionalisierungsangebote, die Grundprinzipien effektiver Fortbildungen folgen (Barzel & Selter, 2015) und vor allem Lehrkräfte zur inhaltlichen Reflexion ihrer Routinen veranlassen und ihnen ermöglichen, ihre Selbstwirksamkeit bei neuen Unterrichtsroutinen mit digitalen Medien zu erleben (Thurm, erscheint 2019).

Für Unterrichtsentwicklung braucht es auf der Unterrichtsebene gute Unterrichtsmaterialien und -konzepte und auf der Fortbildungsebene gute Professionalisierungsangebote. Für beides ist die Arbeit des GDM-Arbeitskreises hoch bedeutsam. Die immensen Herausforderungen sind nur in der Kooperation zwischen Schule und Wissenschaft zu leisten und es sollten auch die verschiedenen Perspektiven Berücksichtigung finden, um sowohl fundierte als auch realisierbare Wege auszuloten. Schule muss hier auf Wissenschaft zählen können.

Literatur

Ball, L. (2014). *Use of Computer Algebra Systems (CAS) and written solutions in a CAS allowed Year 12 mathematics subject: Teachers' beliefs and students' practices.* (PHD-Thesis). https://minerva-access.unimelb.edu.au/

Barzel, B. (2006): Mathematik zwischen Konstruktion und Instruktion. Evaluation einer Lernwerkstatt 11 Jahrgang mit integriertem Einsatz Computeralgebra. Dissertation. Universität Duisburg-Essen. Online verfügbar unter http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-14643/Dissertation-Barzel.pdf, zuletzt geprüft am 13.07.2015.

Barzel, B. (2012): Computeralgebra – Mehrwert beim Lernen von Mathematik – aber wann? Münster: Waxmann Verlag

Barzel, B., Selter, C. (2015) *Die DZLM-Gestaltungsprinzipien für Fortbildungen.* In: Journal für Mathematik-Didaktik (2015) 36: S. 259–284.

Biehler, R. (1985). Interrelations between computers, statistics and teaching mathematics. In Commission Internationale de L'Enseignement Mathematique (Ed.), *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and Its Teaching,* Supporting Papers (pp. 209-214). Strasbourg: University IREM 1985.

Biehler, R. (2019). Software for learning and for doing statistics and probability - Looking back and looking forward from a personal perspective. In J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín and E. Molina-Portillo (Eds.), Proceedings of the Third International Virtual Congress of Statistical Education.

BMBF (2016). *Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft. Strategie des Bundesministeriums für Bildung und Forschung.* Berlin: BMBF. Verfüpgbar unter: https://www.bmbf.de/files/Bildungsoffensive_fuer_die_digitale_Wissensgesellschaft.pdf (letzter Zugriff am 17.4.2018)

Bos, W., Lorenz, R., Endberg, M., Eickelmann, B., Kammerl, R., WElling, St. (2016). Schule digital – der Länderindikator 2016. Münster: Waxmann.

Drijvers, P.; Trouche, L. (2008): From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In M. Kathleen Heid und Glendon W. Blume (Hg.): Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives. Research Syntheses, Bd. 1. 2 Bände. Charlotte, North Carolina: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1), S. 363–391.

Drijvers, P., Ball, L., Barzel. B, Heid, K.M., Maschietto, M. (2016). Uses of technology in Lower Secondary Mathematics Education – A Concise Topical Survey. Springer Open access.

Glade M. (2016) *Individuelle Prozesse der fortschreitenden Schematisierung.* Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts. Springer Spektrum, Wiesbaden

Hentschel, T. & Pruzina, M. (1995). Graphikfähige Taschenrechner im Mathematik-unterricht – Ergebnisse aus einem Schulversuch in Klasse 9/10. In: JMD 1995 (3/4), S.193– 232

Hölzl, R. (1999): Qualitative Unterrichtsstudien zur Verwendung dynamischer Geometrie-Software. Augsburger mathematisch-naturwissenschaftliche Schriften 32. Augsburg, Wißner Verlag. http://www.learnline.de/angebote/selma/medio/dgs/dgseinleitung.htm

Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A. J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (Vol 1, pp. 323-349). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ingelmann, M. & Bruder, R. (2007): *Sinnvoller Einsatz von CAS in den Klassen 7 und 8*. Sektionsbeitrag zur DMV/GDM-Tagung 2007 in Berlin, Download: http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/fbereiche/didaktik/research/Publikationen/MariaIngelmannGDM2007.pdf

KMK (2004). *Standards für die Lehrerbildung.* Beschluss vom 16.12.2004. Bonn: KMK

KMK (2012). *Medienbildung in der Schule.* Beschluss vom 8.3.2012. Bonn: KMK

K.MK (2016). *Bildung in der digitalen Welt*. Beschluss vom 8.12.2016. Bonn: KMK

Lagrange, J.; Artigue, M.; Laborde, C.; Trouche, L. (2003): Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. In: A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick und F. K. S. Leung (Hg.): *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, S. 237–269.

Prediger, S. (2009): Inhlatliches Denken vor Kalkül. In Fritz, A & Schmidt, S. (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I, Beltz Verlag, Weinheim 2009, S. 213-234.

Rieß, M. (2018): Zum Einfluss digitaler Werkzeuge auf die Konstruktion mathematischen Wissens. Springer Spektrum, Wiesbaden

Sträßer, R. (1992): Didaktische Perspektiven auf Werkzeug-Software im Geometrie-Untericht der Sekundarstufe I - ZDM, 24, 197 - 201

Thurm, D. (erscheint 2019). *Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht verankern - Empirische Befunde zur Rolle von Lehrerüberzeugungen und der Wirksamkeit von Fortbildungen.* Springer Spektrum, Wiesbaden

Vollrath, H.-J. (2001). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.* Heidelberg u. Berlin: Spektrum.

Weigand, H-G.; Bichler, E. (2009): *Der Modellversuch Medienintegration im Mathematikunterricht (M3) an bayerischen Gymnasien*. In: Tagungsband 100.MNU-Kongress, Regenburg 2009.

Yerushalmy, M. & Botzer, G. (2011) Teaching secondary mathematics in the mobile age. In Zaslavsky, O. and Sullivan, P. (Eds.*) Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics Tasks to enhance prospective and practicing teacher learning* pp. 191-208.

Mathtrails digital unterstützen – Chancen und Grenzen mobilen Lernens im Mathematikunterricht

Nils Buchholtz, Judith Drexler, Katrin Vorhölter

Im Artikel wird dargestellt, wie mathematische Stadtspaziergänge technisch durch die mobile App Actionbound unterstützt werden können. Es lassen sich organisatorische und mediendidaktische Vorteile bei der Planung und Durchführung von Spaziergängen erkennen, gleichzeitig stellt sich jedoch die Frage nach dem fachdidaktischen Mehrwert der sich aus der Unterstützung ergibt, und es werden auch Nachteile deutlich, beispielsweise in Hinblick auf Lerndiagnostik. Ein Ausblick auf die Einbindung von multiplen Repräsentationsformen durch die Kombination mit weiteren Apps wirft einen Blick auf die Möglichkeiten von fachdidaktischen und technischen Weiterentwicklungen im Bereich des mobilen Lernens im Mathematikunterricht.

Einleitung

Mathematische Spaziergänge oder Wanderpfade ermöglichen Schülerinnen und Schülern unmittelbare Bezüge zwischen realen Objekten und mathematischen Ideen und Zusammenhängen herzustellen, und können als eine Form außerschulischen Lernens im Mathematikunterricht begriffen werden (Buchholtz & Armbrust, 2018). Dabei werden bei diesen Lernarrangements in Form einer Rallye Orte und Objekte im städtischen Raum oder im Umkreis der Schule aufgesucht, an denen mathematische Aufgaben gelöst werden müssen, wobei die zu berücksichtigenden Größen zunächst eigenständig ermittelt werden müssen. Hierbei spielen verschiedene mathematische Leitideen (u.a. Messen) eine Rolle. Diverse Formate von „Mathtrails“ vermitteln Primärerfahrungen insbesondere mit mathematischer Modellierung oder Problemlösen (Buchholtz & Armbrust, 2018; Shoaf, Pollack & Schneider 2004). Mit dem Einzug von digitalen Medien in den Mathematikunterricht stellt sich hierbei nun die Frage, wie sich digitale Medien in fachdidaktische Formate - wie mathematische Spaziergänge - lernwirksam integrieren lassen. Ein Gradmesser für den Nutzen des Einsatzes hierbei ist, inwieweit die Förderung fachlicher Lernprozesse durch die digitale Unterstützung gewährleistet werden kann

(Barzel & Kortenkamp, 2017). Da der Einsatz von digitalen Lernmedien mittlerweile verstärkt mobile Endgeräte einschließt, die aufgrund ihrer Standortungebundenheit idealerweise beim außerschulischen Lernen zur Anwendung kommen können, bauen unterschiedliche Projekte zu Mathtrails mittlerweile auf die begleitende Unterstützung durch Geolokalisierungs-Apps wie MathCityMaps (Ludwig & Jesberg, 2015) oder Actionbound (Buchholtz, 2018).

Die App Actionbound (www.actionbound.de) ist eine zunächst im Bereich der Medienpädagogik entwickelte App zum Erstellen von digitalen Lernpfaden (sog. Bounds), die Elemente von Partizipation und Gamification integriert, und die mittlerweile auch Anwendungen im Unterricht der MINT-Fächer gefunden hat (Mähler, 2012; Schreiber & Schulz, 2017; Bültmann, Koll, Bruckermann & Schlüter, 2017). Die Bezeichnung „digitaler Lernpfad" ist allerdings nicht ganz eindeutig, da es sich bei den Bounds nicht um internetbasierte sequenzierte Lernumgebungen handelt (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015), sondern mit Hilfe der App Aufgaben mit realen Orten verknüpft werden, und der „Lernpfad" somit analog ausgestaltet wird. Werden bei einem derartigen Lernpfad in der App mehrere mathematische Aufgaben sequenziert und mit verschiedenen Orten verknüpft, sprechen wir im Folgenden von einem *digital unterstützten Mathtrail*, der eine Form des mobilen Lernens darstellt. Mobiles Lernen beschreibt eine Spezialform des elektronischen Lernens (vgl. Lude, Schaal, Bullinger & Bleck, 2013, S. 8), welches alle Formen des Lernens mit digitalen Medien bezeichnet (vgl. Witt & Sieber, 2013, S. 15). Es geht beim elektronischen Lernen dementsprechend nicht um eine Lernform, sondern um die „technologische Unterstützung von Lernprozessen durch Informations- und Kommunikationstechnologien" (Witt & Sieber, 2013, S. 16). In diesem Beitrag sollen die Möglichkeiten und Grenzen des mobilen Lernens beim Einsatz von Mathtrails, die durch Actionbound digital unterstützt werden, ausgelotet werden.

Erstellen und Durchführen von Mathtrails mit Actionbound

Die App Actionbound verfügt über zwei Modi, die sowohl bei der Planung der Spaziergänge (im Ersteller-Modus am heimischen PC) als auch während des mathematischen Spaziergangs auf dem Smartphone oder Tablet (sog.

Bound-Modus) unterstützend gebraucht werden können. Die Lehrkraft bereitet den Mathtrail zunächst vor, indem sie passende Aufgaben in der App selbst erstellt. Für den privaten Gebrauch ist die App kostenlos, jedoch können in diesem Fall entsprechend erstellte Bounds von allen Nutzerinnen und Nutzern aufgerufen werden.

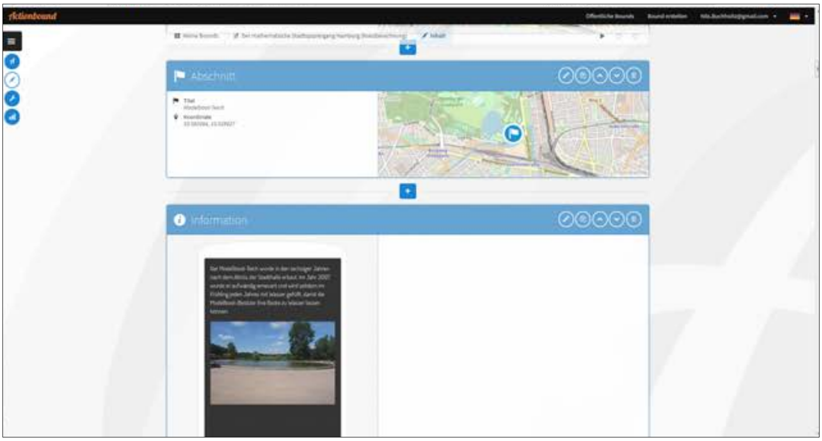


Abb. 1: Ersteller-Modus der App Actionbound
(© Actionbound, mit freundlicher Genehmigung)

Im Ersteller-Modus lassen sich in Thread-Form (d.h. als Abfolge von Einträgen) Kapitel und Aufgaben erstellen, hinzufügen und bearbeiten, es kann mit Hilfe von Koordinaten die Route des Mathtrails festgelegt werden, und es lassen sich Hilfen und Musterlösungen entwickeln (vgl. Abb. 1). Weiterhin können für verschiedene Aufgabenformate (z.B. Quiz, freie Aufgabe, Sortieraufgabe) Zeitbegrenzungen und Lösungsintervalle für Schieberegler festgelegt werden, so dass auch das Berücksichtigen von Messfehlern oder unterschiedlicher Modellierungsannahmen gewährleistet werden kann (vgl. Abb. 2). Die Aufgaben können nicht nur in Textform hinterlegt werden, sondern Actionbound bietet auch Möglichkeiten, externe Links, Bilder, Videos oder Audioaufnahmen zu integrieren, so dass beispielsweise ein Erklärvideo, ein interessanter Artikel oder eine mathematische Skizze mit relevanten Größen ergänzt werden kann, je nachdem, welcher Schwierigkeitsgrad für die Aufgaben gewählt wird und welche Formen der Unterstützung angeboten werden sollen.

Bei der Durchführung kann der erstellte Mathtrail im Bound-Modus mittels Scannen eines QR-Codes oder direkt über die Suche in der App aufgerufen werden. Alle Medieninhalte für den Mathtrail lassen sich im Vorfeld herunterladen, so dass während des Spaziergangs keine mobilen Daten verwendet werden müssen. Allerdings sollte die GPS-Lokalisierung des mobilen Geräts aktiviert sein, da die angegebenen Orte sonst nicht angesteuert werden können.

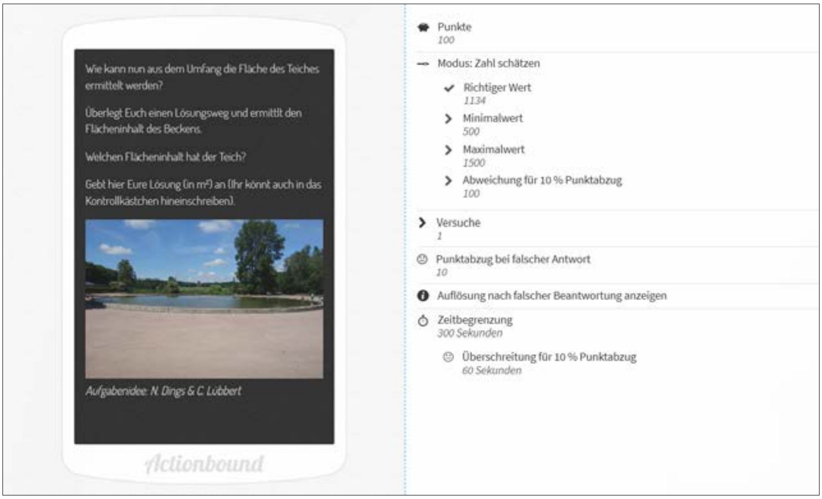


Abb. 2: Erstellung von Aufgaben (© Actionbound, mit freundlicher Genehmigung)

Die App gestaltet das „Spielen" des Bounds gemäß dem Gamification-Ansatz als Wettbewerb, bei dem die Schülerinnen und Schüler Punkte für gefundene Orte, gelöste Aufgaben und das Einhalten von Zeitvorgaben erhalten. Die App präsentiert die erstellten Aufgaben in festgelegter Reihenfolge, die dann mittels Geolokalisierung abgelaufen wird (ein variabler Start des Bounds kann eingestellt werden). An den jeweiligen Standorten lösen die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe und geben die Lösung in die App ein. Die App stellt daraufhin ein direktes Lösungs-Feedback und wahlweise zuvor programmierte Hilfestellungen bei falschen Antworten bereit (vgl. Abb. 3).

Am Ende des Bounds zeigt die App ein Endergebnis an, und die Schülerinnen und Schüler können sich entscheiden, ob ihre Ergebnisse auf der Actionbound-Website veröffentlicht werden, wobei diese Option auch ausgestellt werden kann. Gleiches gilt im Übrigen auch für alle während des Bounds hochzuladenden Bilder oder Tonaufnahmen (dieser Schritt kann im Bound übersprungen werden). Im Rahmen des Projekts zum mathematischen Stadtspaziergang Hamburg (Buchholtz, 2018) wurden bislang mehrere Bounds realisiert, ein Mathtrail zur Kreisberechnung kann unter https://actionbound.com/bound/mssghamburgkreisberechnung exemplarisch eingesehen bzw. ausprobiert werden.

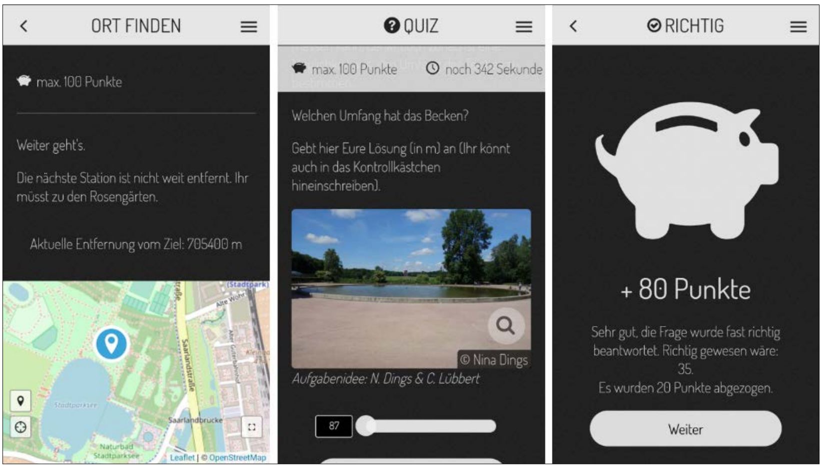


Abb. 3: Bound-Modus der App Actionbound (© Actionbound, mit freundlicher Genehmigung)

Welche Chancen und Herausforderungen bietet der Einsatz digitaler Medien bei Mathtrails?

Die praktischen Vorteile der App-Unterstützung liegen bei der Planung in der – abgesehen von der Zeit, die für das Erstellen des Trails aufgewendet wird – einfachen Vorbereitung und Anpassung des Spaziergangs für die Lehrkraft. Für diese Integration von digitalen Medien in den Mathematikunterricht müssen keine Computerräume oder Laptops organisiert werden. Während des Spaziergangs sind die handliche Form und Größe von Smartphone bzw. Tablet, sowie der Robustheit und der intuitiven Benutzung der App von Vorteil. Es lassen sich aber auch mediendidaktische Vorteile des digitalen Mediums Actionbound nach Petko (2014, S. 18 ff.)

identifizieren, unter anderem die Multimedialität, der Grad der Interaktivität und die Adaptivität bzw. die Adaptierbarkeit. Die App ist multimedial, da sowohl Text, Bild und Animationen (multikodal) als auch Audioaufnahmen (multimodal) kombiniert werden können. Dies bietet insbesondere für den Mathematikunterricht die Möglichkeit, auf verschiedene Darstellungen in der Aufgabenformulierung zurückzugreifen oder etwa Baupläne oder Reinzeichnungen in die Aufgabengestaltung einzubauen, die damit durch einen „augmented reality"-Charakter zusätzliche Informationen oder Herangehensweisen für die Schülerinnen und Schüler bereithalten können. Für die Verwendung interaktiver digitaler Medien im Unterricht können nach Urff (2014) zwei Formen der Interaktivität unterschieden werden: die objektbezogene und die unterstützende Interaktivität. Die objektbezogene Interaktivität ist in Actionbound eingeschränkt auf das Eingeben von Text, das Bewegen von Schiebereglern und das Hochladen von Bildern, Lösungsskizzen oder Videos in Aufgaben. Es kann jedoch nicht anderweitig mit der App interagiert oder der Mathtrail unterwegs verändert werden. Die unterstützende Interaktivität bezieht sich hingegen nicht auf die Aufgaben selbst, sondern auf Interaktionen über die Aufgaben. Durch unterstützende Interaktivitäten digitaler Lernmedien besteht die Möglichkeit den Lernenden „vor, während oder nach dem Lösungsprozess […] zeitnahe, prozessbezogene Rückmeldungen und Hilfe" (Urff, 2014, S. 182) anzubieten und so Leistungssteigerungen und Motivation anzuregen. Die App zeigt den Schülerinnen und Schülern entsprechend über die Eingabe der Antworten beziehungsweise Lösungen unmittelbar Rückmeldungen an (vgl. Laborde & Strässer, 2016), die die unterstützende didaktische Funktion des Informierens erfüllen (Urff, 2014, S. 147). Erste empirische Ergebnisse im Zusammenhang mit Mathtrails weisen auf die hohe Bedeutung dieses unmittelbar gegebenen Feedbacks für die Schülerinnen und Schüler hin (Drexler, 2018). Im Bereich der erstellten Rückmeldungen und Hilfen ist die App Actionbound auch adaptiv, worin sich ein didaktischer Mehrwert gegenüber der analogen Durchführung mathematischer Stadtspaziergänge zeigt (vgl. Ludwig & Jesberg, 2015).

Der markanteste Unterschied mobilen Lernens mit der App Actionbound zum generellen Lernen mit digitalen Medien besteht allerdings in der Möglichkeit der Kontextualisierung der Lerninhalte, womit die App-

Unterstützung im Rahmen der Spaziergänge ein entscheidendes weiteres Lernpotenzial digitaler Medien aufweist: Es kann während des Spaziergangs vor Ort eine inhaltliche Vernetzung des Lerngegenstandes in der App zu Anwendungsbeispielen in der Lernumgebung (hier die realen Objekte und die zu ermittelnden Größen auf dem Spaziergang) stattfinden. Die Schülerinnen und Schüler müssen dafür selbstständig die digitalen Lerninhalte mit den entsprechenden Größen der realen Objekte in einen Zusammenhang bringen.

Den beschriebenen Chancen und Möglichkeiten stehen jedoch auch Schwierigkeiten entegegen. Herausforderungen bei der digitalen Unterstützung von Mathtrails bestehen in technischer und unterrichtspraktischer Hinsicht: Während z.B. eine analoge Bearbeitung eines mathematischen Stadtspazierganges eine Protokollierung der Lösungen mitsamt den Lösungswegen vorsieht, erfolgt in der App lediglich eine Lösungseingabe. Bei dem Einsatz von digitalen Lernmedien bei Mathtrails kann somit die Transparenz von Lernprozessen ausbleiben und eine Lernzielüberprüfung erschwert werden. Letztlich machen vor allem fachdidaktisch fundierte Apps mobiles Lernen zu einer Bereicherung für den Unterricht (vgl. Barzel und Kortenkamp, 2017). Verschiedene Apps wie etwa Actionbound mögen als digitale Lernmedien zwar eine prinzipielle Lernorientierung haben, sollten aber für ihren Einsatz im Mathematikunterricht auch einen Mehrwert in Hinblick auf fachliches Mathematiklernen beinhalten. So sehen Barzel und Kortenkamp (2017) den Mehrwert von digitalen Werkzeugen etwa darin, Mathematik durch die Möglichkeit der schnellen Variation oder der Erhöhung der Komplexität von Beispielen besser zu verstehen. Apps sollten zum eigenen Kreieren und kritischen Gebrauch von Werkzeugen wie z.B. Makros anregen, durch die dynamische Verwendung multipler Darstellungsformen Grundvorstellungen und Änderungsverhalten beim Erkunden vermitteln oder als ein kreatives Hilfsmittel im mathematischen Modellierungsprozess zur Seite stehen. Diesen Potenzialen kann die App Actionbound selbst bis auf die Verwendung multipler Darstellungen nur begrenzt nachkommen, da sie im Bound-Modus nur wenig Spielraum zur Variation von Aufgaben oder zu Erkundungsmöglichkeiten bereit hält. Es liegt daher im individuellen Ermessen von Lehrkräften, wie sie das Aufgabenspektrum der App bei der

Erstellung von Mathtrails bestmöglich im Hinblik auf fachliche Lernprozesse ausreizt. Auf wissenschaftlicher Seite fehlt es bislang auch noch an Studien, die die Lerneffekte, die mit mobilen Lernarrangements wie Mathtrails erzielt werden können, empirisch untersuchen.

Weiterentwicklungen zum fachlichen Lernen bei digital unterstützten Mathtrails

Maßgeblich für die Weiterentwicklungen der digitalen Unterstützung von Mathtrails im Rahmen des mathematischen Stadtspaziergangs Hamburg war daher der Gedanke des „App-Smashing" des EdTechTeacher Bloggers Greg Kolowiec (2013):

> *After working with iPads for any amount of time in the classroom, one will quickly realize that most processes can't be completed with just one app. While many apps slightly overlap in terms of functionality, there tends to be a few black holes in each app that require the use of another app to complete the process. This leads us to ‚App Smashing'. App Smashing Defined: The process of using multiple apps in conjunction with one another to complete a final task or project. (http://kulowiectech.blogspot.com/2013/02/app-smashing-part-i.html)*

In einer kleinen explorativen Studie (Drexler, 2018) wurde untersucht, wie die durch die App Actionbound unterstützten Stadtspaziergänge in einer hybriden Form durch den Einsatz der GeoGebra App erweitert werden können, um die digitale Unterstützung zusätzlich in Hinblick auf fachliche Lernprozesse anzureichern (vgl. zu App-Smashing im MINT-Unterricht auch Delcker, Schumacher & Ifenthaler, 2017). Dabei wurden aufgabenspezifische dynamische Arbeitsblätter mit GeoGebra gestaltet, die in der App Actionbound an geeigneter Stelle verlinkt wurden und damit auf dem Smartphone oder Tablet während des Spaziergangs aufrufbar sind (vgl. Drexler, 2018). Aus fachdidaktischer Sicht ist dabei intendiert, durch den Einsatz von GeoGebra die in der Realität ausgeübten enaktiven Handlungen zusätzlich in Hinblick auf die Kontextualisierung (s.o.) durch die virtuell-enaktive Ebene zu ergänzen (Krauthausen, 2012, S. 227). Auf diese Weise wird eine simultane Präsenz multipler Repräsentationsformen mathematischer Inhalte ermöglicht, die letztlich auf den Kern des fachlichen Lernens mit digitalen Medien und Werkzeugen verweist, mit der zusätzlichen Einbindung des Realitätskontexts aber noch darüber hinaus geht. Schacht

(2018) beschreibt eben dies in seiner Begriffsanalyse des „Digitalen“ durch die philosophischen Betrachtung des Erzeugens von „Differenz“ im Sinne Galloways (2014):

> *Im Herstellen von Beziehungen zwischen den unterschiedlichen Repräsentationsebenen erfahren die Lernenden ebenjene Differenz [...], die durch das Werkzeug überhaupt erst ermöglicht wird. In diesem Sinne erscheint ein solches Multirepräsentationswerkzeug als ein digitales Werkzeug. Digitale Werkzeuge erscheinen daher als Hilfsmittel, die unterschiedliche begriffliche Aspekte zusammenbringen bzw. die eine begriffliche Differenz möglich machen. (Schacht, 2018, S. 132)*

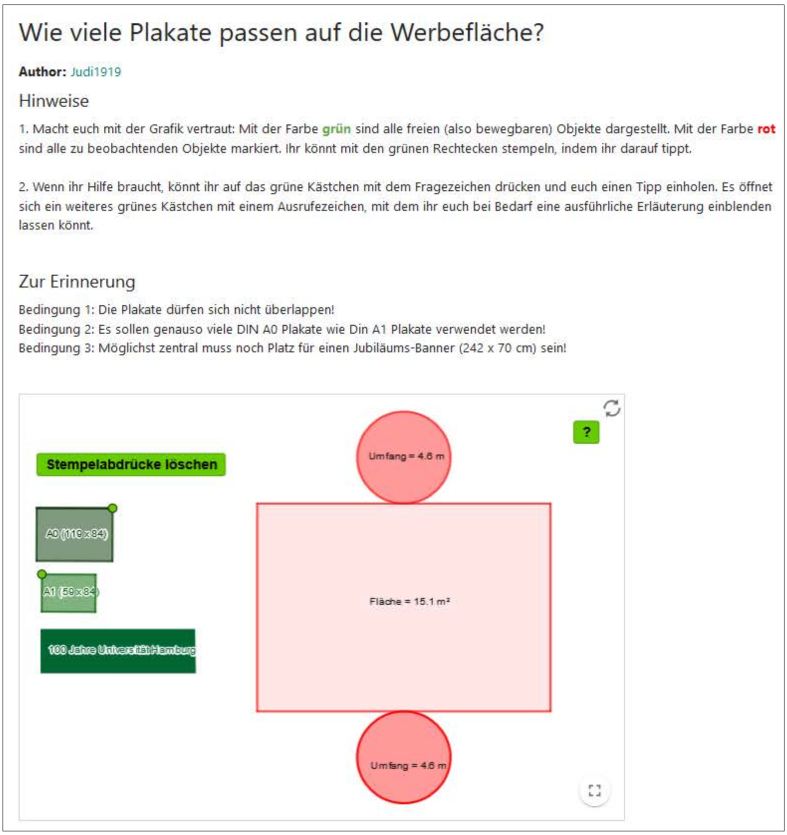


Abb. 4: Dynamisches GeoGebra-Arbeitsblatt zur Aufgabe Litfaßsäule

Das Beispiel in Abb. 4 zeigt ein verwendetes dynamisches Arbeitsblatt. Die passende Aufgabe im Mathtrail besteht darin, zunächst den Umfang und dann die Höhe einer Litfaßsäule vor Ort zu bestimmen, um die Größe der zur Verfügung stehenden Werbefläche zu ermitteln. Anschließend soll die maximale Anzahl Plakate bestimmt werden, die auf eine Littfaßsäule dieser Größe passen (zur Komplexitätsreduktion wurde die Größe der Littfaßsäule in dem GeoGebra-Arbeitsblatt fixiert). Die Aufgabe kann dabei sowohl in der GeoGebra App, als auch direkt am Objekt bearbeitet werden. Neun Studierende mit unterschiedlichen mathematischen Vorkenntnissen führten den durch zusätzliche dynamische Arbeitsblätter in GeoGebra erweiterten Mathtrail auf dem Campus der Universität Hamburg durch. Der Einsatz der beiden Apps zeichnete im Hinblick auf die Unterstützung fachlicher Lernprozesse beim mobilen Lernen für den exemplarisch durchgeführten Mathtrail ein positives Bild, wenngleich die erstellten Hilfen und auch die unterschiedlichen dynamischen Arbeitsblätter von den Studierenden je nach Aufgabe unterschiedlich hilfreich eingeschätzt wurden (Drexler, 2018).

Zusammenfassend stellt Drexler fest, dass verschiedene Aufgabenkriterien von mathematischen Stadtspaziergängen (siehe Buchholtz & Armbrust, 2018) bei der Unterstützung durch multiple Apps nur unterschiedlich stark berücksichtigt werden konnten. Auch der Wechsel zwischen unterschiedlichen Apps wie Actionbound und GeoGebra birgt noch technische Schwierigkeiten. So lässt sich zwar die parallele Ausführung beider Apps auf Tablets gut bewerkstelligen, durch die Verlinkung und durch den parallelen Einsatz von Aufgaben- und Erklärtexten für beide Apps besteht jedoch noch eine gewisse Überfrachtung an textbasierter Instruktion. Wir können im Rahmen dieses Beitrags leider nur einen kleinen Einblick in die Studie geben. Hier zeigten sich aber dementsprechend noch Anknüpfungspunkte für fachdidaktische Weiterentwicklungen des mobilen Lernens mit Mathtrails und Verbesserungen der technischen Umsetzung des App-Smashing.

Literatur

Barzel, B., & Kortenkamp, U. (2017). *Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht. Gestern – Heute – Morgen*. Hauptvortrag auf der Jahrestagung 2017 des DZLM, Saarbrücken. https://vimeo.com/235356479 (28.10.2018).

Buchholtz, N. (2018). Außerschulisches Lernen von Mathematisieren durch App-basierte mathematische Stadtspaziergänge. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 385–388). Münster: WTM-Verlag.

Buchholtz, N., & Armbrust, A. (2018). Ein mathematischer Stadtspaziergang zum Satz des Pythagoras als außerschulische Lernumgebung im Mathematikunterricht. In S. Schukajlow, & W. Blum (Hrsg.), *Evaluierte Lernumgebungen zum Modellieren* (S. 143–163). Wiesbaden: Springer.

Bültmann, P., Koll, H., Bruckermann, T. & Schlüter, K. (2017). Mit Actionbounds die Natur entdecken. In A. Bresges, L. Mähler, R. Stephani & A. Pallack (Hrsg.), *MNU Themenspezial MINT: MINT mit Medien produktiv gestalten* (S. 32–47). Menden: Medienstatt.

Delcker, J., Schumacher, C., & Ifenthaler, D. (2017). Der Einsatz von App Smashing im Unterricht. In A. Bresges, L. Mähler, R. Stephani, & A. Pallack (Hrsg.), *MNU Themenspezial MINT: MINT mit Medien produktiv gestalten* (S. 10–15). Menden: Medienstatt.

Drexler, J. (2018). *Einsatz von GeoGebra bei mathematischen Stadtspaziergängen: Konstruktion und Analyse eines mathematischen Rundgangs auf dem Campus der Universität Hamburg*. Masterarbeit Universität Hamburg. Hamburg: UHH.

Galloway, A. R. (2014). *Laruelle. Against the Digital*. Minneapolis: London: University of Minnesota Press.

Kolowiec, G. (2013). *App Smashing: Part I*. http://kulowiectech.blogspot.com/2013/02/app-smashing-part-i.html (04.12.2018).

Krauthausen, G. (2012). *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule.* In der Reihe F. Padberg (Hg.), Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin: Springer Spektrum.

Laborde, C., & Strässer, R. (2016). Was bedeutet Interaktivität in einer dynamischen Computer-gestützten Lernumgebung? In G. Heintz, G. Pinkernell & F. Schacht (Hrsg.), *Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht: Festschrift für Hans-Jürgen Elschenbroich* (S. 166–187). Neuss: Seeberger Verlag.

Lude, A., Schaal, S., Bullinger, M., & Bleck, S. (2013). *Mobiles, ortsbezogenes Lernen in der Umweltbildung und Bildung für nachhaltige Entwicklung: der erfolgreiche Einsatz von Smartphone und Co. in Bildungsangeboten in der Natur.* Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.

Ludwig, M., & Jesberg, J. (2015). Using Mobile Technology To Provide Outdoor Modelling Tasks: The MathCityMap-Project. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 191*, 2776–2781.

Mähler, L. (2012). Actionbound. In A. Bresges, A. Pallack, & L. Mähler, *Themenspezial MINT - Herausforderungen Schulalltag: Praxischeck Tablets & Co* (S. 20-22). Neuss: Seeberger Verlag.

Petko, D. (2014). *Einführung in die Mediendidaktik: Lehren und Lernen mit digitalen Medien*. Weinheim: Beltz Verlag.

Roth, J., Süss-Stepancik, E., & Wiesner, H. (Hrsg.) (2015). *Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Lernpfade als Weg zum Ziel*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schacht, F. (2018). Zur Rolle von Grundbegriffen in der Forschung zum digitalen Lernen. In G. Pinkernell & F. Schacht (Hrsg.), *Digitales Lernen im Mathematikunterricht* (S. 127–138). Hildesheim: Franzbecker.

Schreiber, C. & Schulz, K. (2017). Actionbound – virtuelle Schnitzeljagd. Mathematische Aspekte in der Umwelt spielerisch entdecken. *Mathematik differenziert, 1/2017*, 22–25.

Shoaf, M.M., Pollack, H., & Schneider, J. (2004). *Math Trails*. Lexington: COMAP.

Urff, C. (2014). *Digitale Lernmedien zur Förderung grundlegender mathematischer Kompetenzen: Theoretische Analysen, empirische Fallstudien und praktische Umsetzung anhand der Entwicklung virtueller Arbeitsmittel*. Berlin: Mensch und Buch.

Witt, C., & Sieber, A. (2013). *Mobile Learning: Potenziale, Einsatzszenarien und Perspektiven des Lernens mit mobilen Endgeräten*. Dordrecht: Springer.

Historische Aspekte der Analysis – dynamisch visualisiert

Hans-Jürgen Elschenbroich

Es werden historische Zugänge zur Analysis als Infinitesimalrechnung, dem Rechnen mit infinitesimalen Objekten, thematisiert und visualisiert. LEIBNIZ, PASCAL und CAVALIERI dachten in und rechneten mit Differenzialen und Indivisiblen. Ihre Arbeiten und auch die LEIBNIZ'schen Schreibweisen gaben damals der Mathematik einen enormen Schub, sind aber heute weitgehend vergessen und werden meist als unexakt angesehen. Ihre Ansätze sollen hier mit Hilfe von GeoGebra-Lernumgebungen dynamisch visualisiert und unterrichtlich nutzbar gemacht werden.

Kann man unendlich Kleines darstellen?

Etwas unendlich Kleines auf Papier und Bildschirm darzustellen, erscheint auf den ersten Blick als Widerspruch. Dabei haben wir uns längst schon daran gewöhnt, mathematische Objekte wie Punkte, gerade Linien und Funktionsgraphen zu ‚sehen', obwohl niemand im Sinne Euklids einen Punkt oder eine Gerade gesehen hat und je sehen wird:

*„1. Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat.*
*2. Eine **Linie** breitenlose Länge.*
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
*4. Eine **gerade Linie (Strecke)** ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleich mäßig liegt.*
*5. Eine **Fläche** ist, was nur Länge und Breite hat." (*EUKLID*)*

Die Zeiten, wo die Mathematiklehrer noch verlangten, dass ein Punkt mit einem sehr spitzen Bleistift durch ein kleines Kreuz markiert wird, sind lange vorbei. Heute werden auf dem Bildschirm Punkte rot, grün oder blau dargestellt, dicker oder dünner, kreisförmig, viereckig oder kreuzförmig. Genau so können auch Geraden und Ebenen farbig und unterschiedlich dick dargestellt werden (in GeoGebra unter *Eigenschaften/Darstellung*).

Die Untersuchung der Steigung von Geraden mit Steigungsdreiecken ist einfach, weil diese unabhängig der Größe des Dreiecks immer den gleichen Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ haben. Zu Beginn der Differenzialrechnung beschäftigte man sich mit der Frage, wie man an gekrümmten Kurven eine Steigung ermitteln kann, wie man ein beliebig kleines Steigungsdreieck darstellen/veranschaulichen kann.

Differenziale, Differenzialquotient und charakteristisches Dreieck

Differenziale wurden zu LEIBNIZ Zeiten als beliebig kleine, aber von Null verschiedene Objekte verstanden, aus denen dann das Verhältnis, der Differenzialquotient gebildet wurde. So wurde die Steigung der Tangente als Quotient aus derartigen Differenzialen bestimmt, die Existenz der Tangente (im heutigen Sinne: die Eigenschaft der Differenzierbarkeit) wurde damals einfach unterstellt. Die Differenziale dx und dy als Katheten und ds als Hypotenuse bildeten an einem Punkt P des Graphen von f ein infinitesimales Dreieck, das die Steigung der Kurve bzw. der Tangente festlegte und charakteristisches Dreieck genannt wurde. Dieses infinitesimale Dreieck versuchte schon LEIBNIZ in Verallgemeinerung einer Idee von PASCAL sichtbar machen, indem er es längs der Tangente vergrößert zeichnete und über die Normale ein ähnliches Dreieck bis zur x-Achse konstruierte (Abb. 1, Abb. 2).

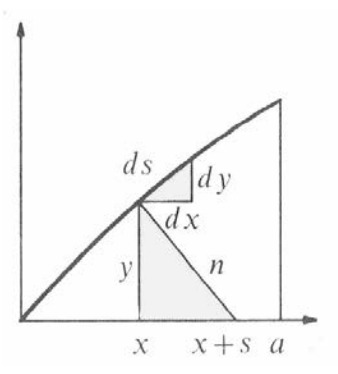


Abb. 1: Das charakteristische Dreieck bei LEIBNIZ (WALTER, 2004, S. 234)

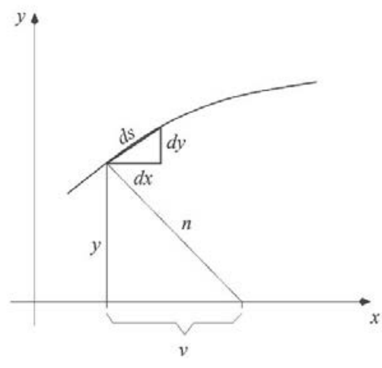


Abb. 2: Das charakteristische Dreieck bei LEIBNIZ (SONAR, 2016, S. 113)

Die Fallstricke dieser statischen Visualisierung offenbaren sich erst auf den zweiten Blick. In beiden Abbildungen ist die Kurve so schwach gekrümmt, dass der Unterschied zwischen dy und Δy, zwischen dem Differenzenquotienten-Dreieck Δx-Δy-Δs an der Sekante und dem Differenzialquotienten-Dreieck dx-dy-ds an der Tangente, nicht augenfällig ist.

Das ist auch in der Originalabbildung von LEIBNIZ so (Abb. 3), der Unterschied zwischen dy und Δy geht in der Strichdicke unter.

Und bei der Abb. 2 von SONAR sieht man noch, dass (entgegen der Ausführung in seinem Text) das Dreieck y-v-n offensichtlich *nicht* ähnlich zum Dreieck dx-dy-ds ist (und auch nicht ähnlich zum Dreieck Δx-Δy-Δs). Der Fehler liegt wohl darin, dass die Strecke n hier nicht orthogonal zur Tangente ist, also keine Normale ist.

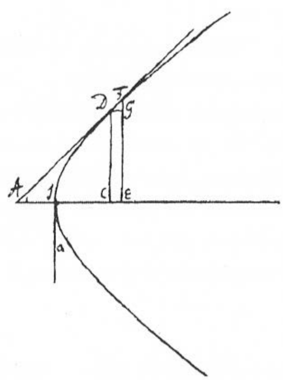


Abbildung 11: Das charakteristische Dreieck im leibnizschen Calculus (Originalabbildung)

Abb. 3: Das charakteristische Dreieck bei LEIBNIZ (WITZKE, 2009, S. 72)

Mit den Möglichkeiten dynamischer Software (hier GeoGebra) kann man diese statischen Visualisierungen dynamisieren und die wesentlichen Aspekte und Unterschiede einblendbar machen. Hierbei wird als Black Box genutzt, dass man mit dem Werkzeug GeoGebra an differenzierbare Funktionen an passender Stelle eine Tangente zeichnen kann. Dies entspricht in moderner Form der seinerzeitigen intuitiven (und aus heutiger Sicht naiven) Annahme, dass Tangenten an Kurven immer existieren.

In der dynamischen Visualisierung kann man die Funktion *f*, den Punkt *P* und Δx verändern. Damit können wir

- entlang der Tangente eine Vergrößerung des infinitesimalen charakteristischen Dreiecks *dx-dy-ds* zeichnen (orange gefüllt),
- im (vergrößerten) charakteristischen Dreieck ein Sekantendreieck einzeichnen (magenta schraffiert),
- und die Vergrößerung/ Verkleinerung über einen Schieberegler Δx steuern (ELSCHENBROICH, 2018).

Dabei wird dann sowohl der Unterschied zwischen den Dreiecken Δx-Δy-Δs und *dx-dy-ds* sichtbar (für große Δx, Abb. 4) als auch die Annäherung des Dreiecks Δx-Δy-Δs an *dx-dy-ds* (für kleine Δx, Abb. 5). Hierbei ist die Funktionenlupe (ELSCHENBROICH 2015) sehr hilfreich zur Visualisierung.

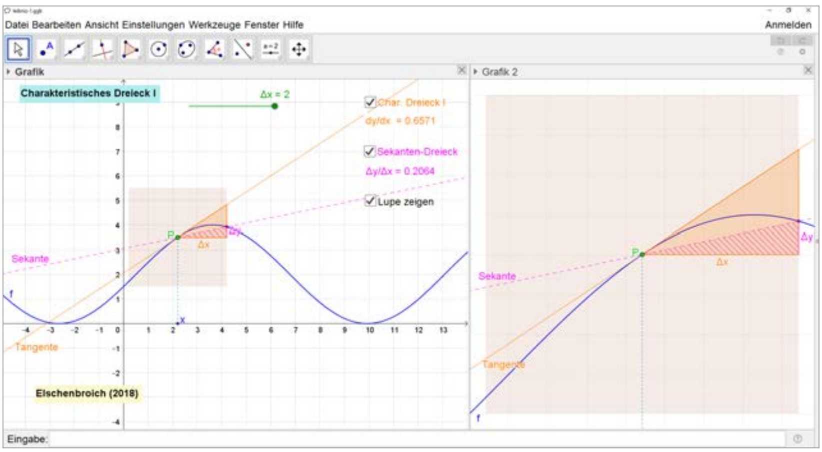


Abb. 4: Charakteristisches Dreieck und Sekantendreieck für $\Delta x = 2$

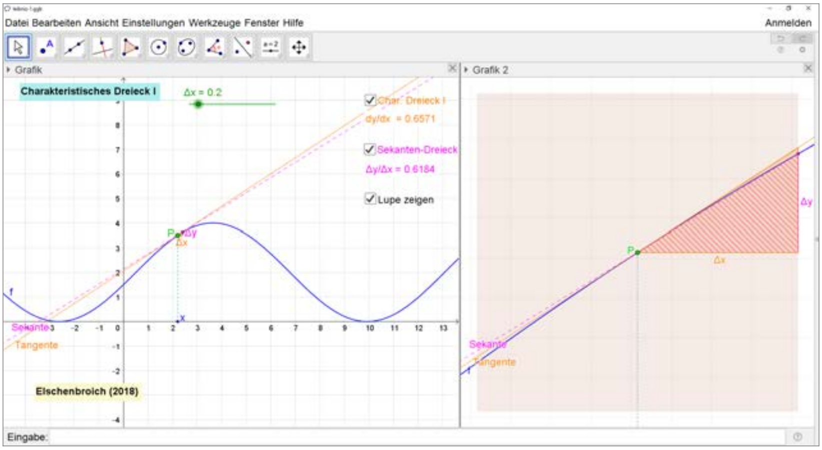


Abb. 5: Charakteristisches Dreieck und Sekantendreieck für $\Delta x = 0.2$

In der klassischen statischen Visualisierung können wir wie in Abb. 1 das charakteristische Dreieck entlang der Normalen bis zur x-Achse vergrößern, so dass es nun bei Verkleinerung von Δx unverändert bleibt (Abb. 6).

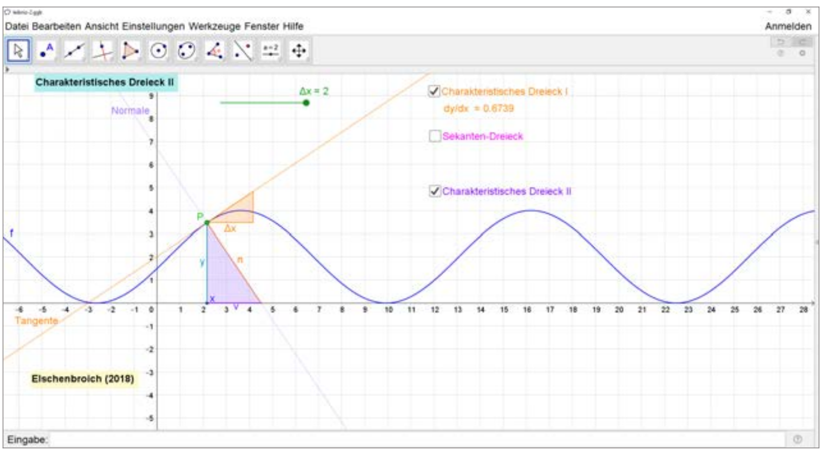


Abb. 6: Charakteristisches Dreieck y-v-n

Gleichgültig, ob das charakteristische Dreieck mit der Funktionenlupe modern dynamisch nach Abb. 4 oder klassisch nach Abb. 6 visualisiert worden ist, haben wir so die Möglichkeit, etwas infinitesimal Kleines zu veranschaulichen, uns vorzustellen. In Kombination mit dem Schieberegler Δx bietet der Ansatz aus Abb. 5 mit der Funktionenlupe auch die Möglichkeit, den Grenzprozess $\Delta x \to 0$ zu visualisieren. Natürlich wird mathematisch kein echter Grenzprozess $\Delta x \to 0$ durchgeführt, denn der Schieberegler endet bei einem kleinen Wert für Δx, hier $\Delta x \to 0 = 0.0001$. Dies ist aber völlig ausreichend, um bei Schülern ein anschauliches Grundverständnis aufzubauen. Und es ist nach meinem Dafürhalten deutlich anschaulicher als die ‚Unendlichkeitsbrille' der Nonstandard-Analysis, wo mit einem infiniten Faktor vergrößert werden muss (BAUMANN & KIRSKI, 2016, S. 10).

Indivisible und Flächeninhalt

Die Vorstellung, dass Objekte aus ‚Indivisiblen', aus unteilbar kleinsten Größen bestehen, stammt von den antiken Atomisten und wurde in der Entwicklung der Integralrechnung insbesondere von CAVALIERI vertreten, woran LEIBNIZ anknüpfte:

> *„Die Indivisiblen sind unendlich dünne Gebilde, die eine um Eins kleinere Dimension besitzen als das von ihnen in ihrer Gesamtheit gebildete stetige Ganze."* (WUSSING, 1979, S. 159).

Dabei stehen wir nun vor dem Problem, nicht nur beliebig kleine Objekte darzustellen, sondern auch noch beliebig viele davon. In der Visualisierung arbeiten wir dann mit ‚ziemlich vielen' und ‚ziemlich kleinen' Objekten.

Wir stellen uns Flächen aus unendlich vielen, unendlich dünnen parallelen ‚rechteckigen Streifen' zusammengesetzt vor. Bei Flächen unter Funktionsgraphen hat ein solcher ‚rechteckiger Streifen' das Differenzial dx als ‚Breite' und f(x) als ‚Höhe' und infolgedessen dann den ‚Flächeninhalt' $dy = f(x) \cdot dx$. Summiert man alle diese Streifen auf, erhält man die gesamte Fläche (Abb. 7, Abb. 8). Die Indivisiblen haben ein Janus-Gesicht:

> *„Each of the indivisibles is simultaneously viewed as a one-dimensional line segment and as an infinitesimally thin two-dimensional rectangle. The indivisible at point x has height f(x) and width dx (using what would be Leibniz' notation from the late 1600s). Therefore it had area f(x)dx." (OTERO 2000)*

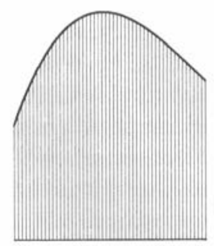


Abb. 7: CAVALIERIs Indivisiblen-methode (WALTER, 2004, S. 193)

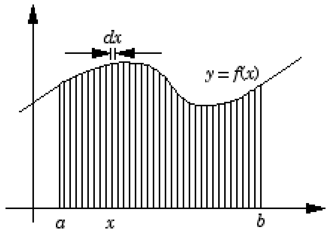


Abb. 8: CAVALIERIs Indivisiblenmethode (OTERO, 2000)

Die Dynamisierung von Abb. 7, Abb. 8 führen wir hier am Beispiel eines halben Einheitskreises und der Funktion f mit $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, durch (natürlich können auch andere Funktionen eingegeben werden). Um das Prinzip zu verstehen, gibt es eine Anzahl *n* der Unterteilungen, die automatisch den Wert Δx festlegt, und wir betrachten *n* Rechtecke $f(x)\cdot\Delta x$, zunächst für kleine *n* und zugehörige große Δx. Die Dynamisierung erfolgt dadurch, dass dieser Wert von *n* verändert, insbesondere vergrößert werden kann. Man sieht für zunächst kleine *n* deutlich, dass wir hier äquidistante Mittensummen haben (Abb. 9). Links und rechts am Rande des Definitionsbereichs ist $f(x)=0$. Einen besonderen Effekt können wir neben dem Erhöhen von *n* auch noch dadurch erzielen, dass wir den Halbkreis dynamisch von links nach rechts füllen lassen (ELSCHENBROICH & SEEBACH, 2018, S. 91).

Eine andere Möglichkeit, sich einen Kreis aus indivisiblen Objekten zusammengesetzt vorzustellen, besteht darin, konzentrische Kreislinien der ‚Breite' *dx* zu wählen (Abb. 10).

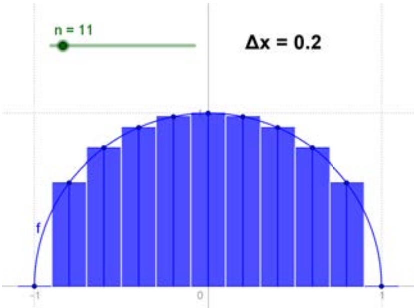


Abb. 9: Halbkreis und achsenparallele Streifen als Indivisible

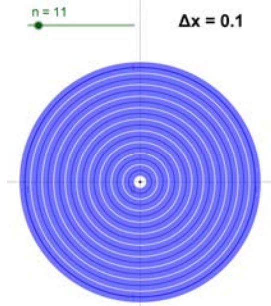


Abb. 10: Vollkreis und konzentrische Kreislinien als Indivisible

Solche nichtparallelen Objekte können aber auch Probleme mit sich bringen, wie aus klassischen Paradoxien bekannt ist (TOEPLITZ 1949, S. 57-58). Dass man dies hier korrekt durchführen kann, erklärt sich anschaulich dadurch, dass man die Kreisringe ‚aufschneiden' kann und nebeneinander ‚aufgestellt' als senkrechte parallele Indivisible zu einer Funktion g mit $g(x)=2\pi x$ sehen kann. Allgemein kann sagen, dass man auf einigermaßen sicherem Terrain ist, wenn die Indivisiblen parallel sind und man mit dem gleichen Inkrement arbeitet.

CAVALIERI und LEIBNIZ navigierten in einer Mischung aus Erfahrung und Intuition durch unsicheres Gelände. So schrieb TOEPLITZ über CAVALIERI und seinen Umgang mit Indivisiblen: „Er blieb auf seinen ‚guten Instinkt' angewiesen." (TOEPLITZ, S. 58) und WUSSING formulierte: „LEIBNIZ war sich der Unbestimmtheiten und logischen Widersprüchlichkeiten seines Differentialbegriffs und des Umgangs mit ‚unendlich kleinen Größen' sehr wohl bewußt." (WUSSING S. 174). Das war nicht jedem ihrer Zeitgenossen gegeben. Dass aber LEIBNIZ sehr wohl wusste, was er tat, zeigt sein erst 2016 veröffentlichter Text von 1676, in dem er schon die Grundidee der modernen Epsi-lontik vorwegnahm. Er formulierte dort, dass sich der Wert der Rechtecksumme vom Wert des Integrals „um eine Quantität unterscheidet, die kleiner ist als eine beliebige gegebene." (LEIBNIZ, zitiert nach ULLRICH 2017, S. 24).

Noch mehr Indivisible

So wie man bei den parallelen Strecken-Indivisiblen als Bildmetapher an einen Boden mit Dielen denken kann, so kann man bei einer Linie und Punkt-Indivisiblen an eine Kette aus Perlen denken und bei Körpern und Flächen-Indivisiblen an einen Stapel Papier. Auch ist eine Computertomographie ein modernes Beispiel, wo ein Kopf in 2 mm dicken parallelen Schichten aufgenommen wird und diese dann zusammen ein dreidimensionales Bild ergeben.

Wenn wir die Indivisiblen aus Abb. 9 um die x-Achse rotieren lassen, entstehen aus den ‚Streifen' $f(x) \cdot dx$ durch die Rotation um die x-Achse zylindrische ‚Scheiben' $\pi f^2(x) \cdot dx$ (die zwangsläufig parallel sind) als neue Indivisible für die Kugel (Abb. 11).

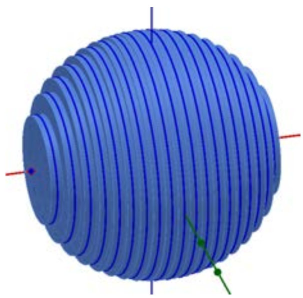


Abb. 11: Kugel und zur x-Achse orthogonale ‚Scheiben' $\pi f^2(x) \cdot dx$ als Indivisible

So erhalten wir für das Volumen der Einheitskugel in der Summe all dieser Indivisiblen $\sum\limits_{omn.} \pi f^2(x) \cdot dx = \int\limits_{-1}^{1} \pi(1-x^2)dx = \frac{4}{3}\pi$. In der Schreibweise lassen wir uns dabei von LEIBNIZ und CAVALIERI inspirieren und schreiben in der Summation *omnia* (*omn.*). LEIBNIZ rechnete mit Differenzialen wie mit reellen Zahlen, insbesondere Quotienten (SONAR, S. 406), Produkten und Summen.

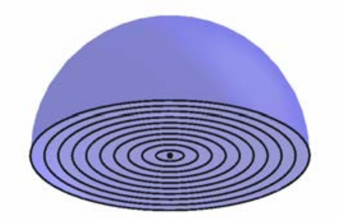


Abb. 12: Halbkugel und konzentrische Sphären *dx* als Indivisible

Ein anderer Ansatz, sich die Kugel aus nicht-parallelen Indivisiblen bestehend vorzustellen, ist eine Verallgemeinerung von Abb. 10. Als Indivisible nehmen wir hier konzentrische Sphären, Kugelschalen der Dicke dx. Damit man aber etwas sehen kann, beschränken wir uns auf die halbe Einheitskugel und schauen von unten auf die Grundfläche (Abb. 12). Damit erhalten wir für das Volumen: $\sum_{omn.} 2\pi x^2 \cdot dx = \int_0^1 2\pi x^2 dx = \frac{2}{3}\pi$.

Das Potential der LEIBNIZschen Schreibweise und Denkweise zeigt sich besonders schön bei der Berechnung der Kurvenlänge. Den Graphen von f stellen wir uns dazu aus indivisiblen Kurvenstückchen $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ bestehend vor (COLERUS 1934, S. 267), die alle aufsummiert die Kurve ergeben.

$$\sum_{omn.} ds = \sum_{omn.} \sqrt{dx^2+dy^2} = \sum_{omn.} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \; .$$

Mit Differenzialen & Indivisiblen rechnen

LEIBNIZ schuf Schreibweisen und Bezeichnungen für den Differenzialquotienten und das Integral, die sich über Jahrhunderte erhalten und bewährt haben. Er strebte nach einer formalen Universalsprache und hat durch geniale Wahl seiner Symbole ein Kalkül geschaffen, „so dass das Rechnen mit den Symbolen fast von selbst funktioniert“ (SONAR 2016, S. 406).

„Bei den Bezeichnungen ist darauf zu achten, daß sie für das Erfinden bequem sind. Dies ist am meisten der Fall, so oft sie die innerste Natur der Sache mit Wenigem ausdrücken und gleichsam abbilden. So wird nämlich auf wunderbare Weise die Denkarbeit vermindert." (LEIBNIZ, zitiert nach WUSSING, S. 173)

Der LEIBNIZsche Kalkül bietet die Möglichkeit, einfach und intuitiv Ableitungsregeln und Integrationsregeln zu formulieren. Beispielhaft seien hier genannt:

Summenregel: $d(u \pm v) = du \pm dv$,

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, Ableitung der Umkehrfunktion: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$,

Substitutionsregel: $\int f(u) \cdot \frac{du}{dx} dx = \int f(u)\, du$.

Differenziale & Indivisible heute und ihr didaktisches Potential

Differenziale und Indivisible als Objekte sind wegen des nebulösen und nicht unproblematischen Umgangs mit dem Unendlichen heute weitgehend aus Analysis in Schule und Hochschule verschwunden.

Zwar ist in der englischsprachigen Literatur das Symbol $\frac{dy}{dx}$ für die Ableitung/Steigung gängig, es findet sich auch im Menü des CAS-Programms TI-Nspire (Abb. 13). Aber heute wird in der Regel dem Differenzialquotienten die Quotienten-Eigenschaft abgesprochen, indem man ihn als *ein* unteilbares Symbol, als bloße Schreibfigur sieht. Deswegen soll er „auch nicht als Bruch von zwei reellen Zahlen verstanden werden, sondern ist nur als Ganzes sinnvoll. $\frac{dy}{dx}$ wird auch nicht ‚*dy durch dx*' gelesen, sondern ‚*dy nach dx*' " (KRONFELLNER, S. 81).

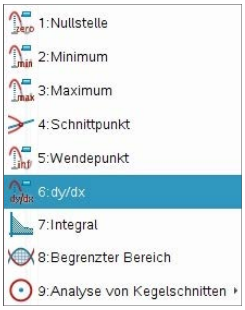


Abb. 13: TI-Nspire: Menü Graph analysieren

Beim Integral ist es ähnlich. Den Ausdrücken $f(x) \cdot dx$ wird die Produkt-Eigenschaft abgesprochen und das Symbol $\int f(x)\,dx$ wird als *Integral von* f *nach* dx gelesen. Hier wird eine Pseudoexaktheit exerziert, die oberflächlich mehr Korrektheit bringt, aber nicht mehr Klarheit und Verständnis.

Wie kann man Differenzialen und Indivisiblen auch heute mathematisch und didaktisch Sinn geben?

Früher wurde von Differenzialen ausgehend der Differenzialquotient und damit die Steigung der Tangente, der Wert $f'(x)$ bestimmt. Wenn man heute in der Näherungsrechnung mit Differenzialen arbeitet, so erhält man von der Ableitung $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ausgehend $dy = f'(x) \cdot dx$ (Abb. 14).

DIFFERENTIALE.

Ist $P\,(x \mid y)$ ein beliebiger Punkt der Kurve $y = \ (x)$ (Abb. 74) und wächst x um Δx, so wächst y um $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Ersetzt man die Kurve durch die Tangente in P, so erhält man statt Δy den Zuwachs dy. Der Einheitlichkeit halber schreibt man in diesem Fall dx statt Δx.

Abb. 14: Differenziale (LAMBACHER & SCHWEIZER 1950, S. 102)

Weiter ist dann $dx = \Delta x$ und wir können damit $\frac{dy}{dx}$ tatsächlich als Quotienten von diesen Differenzialen handhaben (MANGOLDT & KNOPP 1968, S. 68f). Diese Differenziale sind dann aber nicht mehr ‚unendlich klein'. Für immer kleineres Δx nähert sich dann Δy immer mehr dy an.

Für die Indivisiblen kann man die RIEMANNsche Integral-Definition mit ‚passenden' Zwischenpunkten ξ_i für Zerlegungen Z des Intervalls [a, b] aufgreifen. Hier hätten wir die spezielle Situation, dass die Zerteilung äquidistant ist und die ξ_i immer in der Mitte des Intervalls sitzen (Abb. 15).

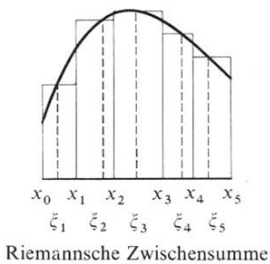


Abb. 15: RIEMANNsche Zwischensummen (WALTER 2004, S. 203)

Die Denkweise von LEIBNIZ hat auch heute noch ein didaktisches Potential:

a) Sie ist geistesgeschichtlich und mathematikgeschichtlich interessant:
   - Woher haben Differenzialrechnung und Differenzialquotient ihren Namen?
   - Woher kommt die Differenzial- und die Integral-Schreibweise?

b) Sie ermöglicht in der dynamischen Visualisierung einen genetischen Zugang zu Grundvorstellungen und zentralen Ideen der Analysis.

c) Man kann damit einfach Ableitungs- und Integrationsregeln finden.

Zu guter Letzt

Ich greife historische Ideen und Ansätze auf, insbesondere von LEIBNIZ und CAVALIERI, und versuche sie mit digitalen Werkzeugen für den modernen Unterricht nutzbar zu machen. Dies hat nicht den Exaktheits-Anspruch eines mathematikhistorischen Aufsatzes, sondern ist mehr ein Crossover.

Ich danke Frau Dr. CHARLOTTE WAHL von der Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek für wichtige und hilfreiche Hinweise, die ich hier nicht vorenthalten möchte:

I. LEIBNIZ' Monaden sind zwar unteilbar kleinste Teilchen, aber seine Differenziale (und auch Produkte, die dann infinitesimal schmale Flächenelemente ergeben) sind es nicht, denn die sind teilbar (man kann 0.5dx schreiben). Hier unterscheiden sich CAVALIERI und LEIBNIZ.

II. Paradoxien im Umgang mit Indivisiblen entstehen, wenn man wie CAVALIERI keine Breite annimmt. Wenn man aber wie LEIBNIZ eine infinitesimale, aber wohlbestimmte Breite dx annimmt, dann rechnet man mit Flächeninhalten und hat das Problem nicht.

III. Meine Schreibweise $\sum\limits_{omn.}$ ist ein mathematikhistorisches Medley. Das Summenzeichen geht auf EULER zurück. Die Abkürzung *omn.* für *omnia* stammt von CAVALIERI. LEIBNIZ hat das große Sigma nicht als Summenzeichen verwendet, sondern anfangs nur das Wort *omn*. Er hat auch nicht "*omn.*" in Zusammenhang mit "*dx*" verwendet, sondern "*omn. l*" für "alle Linien l" geschrieben. Später hat LEIBNIZ für die Summation dann das lange stilisierte S für *summa*, das Integralzeichen $\int$, entwickelt.

IV. Ich habe beim Ausdruck $f(x)\cdot dx$ sowohl die Sichtweise von CAVALIERIs Indivisiblen als auch von LEIBNIZ‘ Differentialen gesehen und dazwischen gewechselt. LEIBNIZ‘ Differentiale (oder auch ihre Produkte) sind genau genommen keine Indivisiblen, weil sie im Gegensatz zu CAVALIERIs Größen teilbar sind. LEIBNIZ hat sie auch selbst nicht so genannt und nur einmal nennt er sie eine unendlich kleine Größe „*minima seu indivisibilis*“.

V. Man muss unterscheiden zwischen CAVALIERIs Definition, wo Indivisible Linien in einer Fläche sind, und späteren Definitionen, wo Indivisiblen (besser spricht man dann von Infinitesimalen) eine unendlich kleine Breite zugestanden wird. CAVALIERI war mit den Indivisiblen sehr bewusst umgegangen, nur ganz bestimmte Operationen waren erlaubt. Ist man weniger vorsichtig, wie seine

Nachfolger und Kritiker, dann stößt man schnell auf Paradoxien. Deshalb ist man dann zu Infinitesimalen übergegangen. Der Vorteil einer Breite - auch wenn sie unendlich klein ist - ist, dass man sie z. B. halbieren kann.

Literatur

Baumann, P. & Kirski, T. (2016): Analysis mit hyperreellen Zahlen. In: Mitteilungen der GDM 100. https://didaktik-der-mathematik.de/pdf/gdm-mitteilungen-100.pdf

Elschenbroich, H.-J. (2018): Leibniz Calculus. GeoGebra Book. https://www.geogebra.org/m/hymsqdyg

Elschenbroich, H.-J. (2015): Die interaktive Funktionenlupe - Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung von Grundvorstellungen der Analysis. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. https://eldorado.tu-dortmund.de/ bitstream/2003/34522/1/BzMU_2015_Band_1.pdf

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2018): Funktionen erkunden. Ideenreiche Arbeitsblätter mit GeoGebra. Friedrich Verlag, Velber

Euklid: Die Elemente. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 235 (1997). Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt a. M.

Kronfellner, M. (1998): Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien

Lambacher, T. & Schweizer, W. (1950): Lambacher-Schweizer Teil III/I, Analysis. Klett, Stuttgart

v. Mangoldt, H. & Knopp, K. (1968): Eine Einführung in die höhere Mathematik. Zweiter Band. 13. Auflage. Hirzel, Stuttgart

Otero, D. E. (2000): Buonaventura Cavalieri. http://cerebro.xu.edu/math/math147/ 02f/cavalieri/cavintro.html

Sonar, T. (2016): Der Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Newton. In: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Akademievorlesungen Februar – März 2016. Band 1 (Hamburger Akademievorträge). http://hup.sub.uni-hamburg.de/volltexte/2017/ 171/chapter/HamburgUP_ADW_01_Leibniz_Sonar_Prioritaetsstreit.pdf

Toeplitz, O. (1949): Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Erster Band. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg

Ullrich, P. (2017): Das Manuskript von Leibniz aus dem Jahre 1676 über Infinitesimalrechnung. In: Der Mathematikunterricht Heft 3/ 2017. Friedrich Verlag, Velber

Walter, W. (2004): Analysis 1. 7. Auflage, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg

Witzke, I. (2009): Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Verlag Franzbecker, Berlin, Hildesheim.

Wußing, H. (1979): Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Aufgabenanalyse zur Bestimmung des Unterstützungspotentials von dynamisierten Darstellungsumgebungen – Theoriebasierte Entwicklung einer Entscheidungsheuristik für Lehrkräfte

Fabian Grünig, Markus Vogel

Der Einsatz von computergestützten Darstellungen im Mathematikunterricht wird häufig mit der Erwartung von tieferer Einsicht in mathematische Phänomene verbunden. Entscheidungshilfen für Lehrkräfte dafür, wann sich die Computerunterstützung für den Einsatz bei einer Mathematikaufgabe eignet, stehen jedoch selten zur Verfügung. In diesem Beitrag wird eine solche Entscheidungshilfe in Form einer Heuristik für Aufgaben zum Änderungsverhalten aus theoretischen Überlegungen entwickelt, wobei kognitionspsychologische und stoffdidaktische Perspektiven berücksichtigt werden.

Einleitung

Der Zugang zu mathematischen Objekten oder Prozessen ist nicht ohne die Entwicklung oder Verwendung von Darstellungen möglich (Duval, 2006). Insbesondere computergestützte Darstellungen bieten durch Animationen, Interaktivität oder dynamische Übersetzungen das Potenzial, den Lernprozess von Schülerinnen und Schülern zu unterstützen (z. B. Vogel, Girwidz & Engel, 2007) und ein tieferes Verständnis zu ermöglichen (z. B. Ainsworth, 2006). Bei der Unterrichtsplanung stehen Mathematiklehrkräfte vor der Herausforderung, einschätzen zu müssen, wie eine computergestützte Darstellung im Unterrichtskontext den Lernprozess, etwa bei der Begriffsbildung, der Schülerinnen und Schüler beeinflusst.

In diesem Beitrag wird ein theoriebasiertes, heuristischer Analyseansatz herausgearbeitet, der die Frage nach der Passung von Mathematikaufgabe und computergestützten Darstellung als Hilfsmittel für deren Bearbeitung in den Blick nimmt. Der Analyseansatz dient der Entwicklung eines Testinstruments in einem Projekt des Graduiertenkollegs „Effektive Kompetenzdiagnose in der Lehrerbildung“ (EKoL), gefördert durch das

Land Baden-Württemberg. In diesem Beitrag wird der Ansatz unabhängig vom Projektbezug und dem Ziel der Testentwicklung diskutiert.

Zum Unterstützungspotenzial von computergestützten Darstellungen

Eine Möglichkeit die Unterstützung des Lernprozesses durch computergestützte Darstellungen zu erklären, besteht in der Entlastung von kognitiven Prozessen. Die Unterstützung des Lernprozesses kann unter anderem durch den Supplantationseffekt nach Salomon (1972) und den Effekt des Computational Offloading (Scaife & Rogers, 1996) theoretisch untermauert werden.

Der Supplantationseffekt beschreibt die Möglichkeit, dass computergestützte Darstellungen mentale Prozesse anbahnen können, indem sie die Prozesse durch externalisierte Formen komplementieren. Dadurch sollen Verarbeitungsprozesse auf Seiten der Adressaten angestoßen werden, die zu einer Internalisierung der externen Operationen führen (Salomon, 1979, S. 139). Die Internalisierung soll dabei nicht als direktes Abbild der externalisierten Operation verstanden werden. Sie ist Ausdruck von aktiver Informationsverarbeitung, welche durch die computergestützte Darstellung zwar angestoßen, jedoch nicht ersetz werden kann (Mayer, 2009; Schnotz & Bannert, 2003).

Die Unterstützung des Lernprozesses durch das sog. Computational Offloading beschreibt den Effekt, dass mentale Operationen entlastet werden, indem computergestützte Darstellungen Informationen oder Operationen der dargestellten Objekte einfacher zugänglich machen (Scaife & Rogers, 1996, S. 188-189). Dieser Effekt lässt sich mit dem Grundprinzip der Cognitive Load Theory (Chandler & Sweller, 1991) in Einklang bringen. Ersparte kognitive Ressourcen (extraneous load) können anderweitig für intendiert produktive Zwecke (germane ressources) im Sinne der anstehenden Aufgabenbewältigung nutzbar gemacht werden.

Eine implizite Gleichsetzung von Nutzungs- und Lerneffizienz von externen Darstellungen erfolgt jedoch nicht: Hilfsmittel für das Lösen von Lernaufgaben wirken sich nicht per se positiv auf den Lernerfolg aus, wenn sie die nötige Informationsverarbeitung zur Aufgabenlösung vereinfachen. Vielmehr kommt es auf eine möglichst hohe Übereinstimmung mentaler

Strukturen, dem sogenannten Cognitive Fit (Vessey, 1991), zwischen Lerngegenstand und den unterstützten Strategien oder Prozessen bei der Aufgabenbearbeitung an. „[T]he theory [of Cognitive Fit] describes the effects on performance of matching the nature of the problem representation to the nature of the task." (Vessey, 1991, S. 220) Mit Blick auf computergestützte externe Darstellungen und deren charakteristische Gestaltungsmöglichkeiten ist demnach der Cognitive Fit zu berücksichtigen.

Computergestützte Darstellungen unterscheiden sich von anderen externen Darstellungen unter anderem dadurch, dass interaktive und dynamische Elemente realisiert werden können. Daher unterscheiden sie sich auch darin, bei welchen Lerngegenständen sich ihr Einsatz besonders eignet. In den folgenden Abschnitten wird die Diskussion auf dynamisierte Darstellungsumgebungen fokussiert. Dabei werden deren Charakteristika und Unterstützungsleistungen hervorgehoben und passende Lerngegenstände herausgearbeitet.

Zum Unterstützungspotenzial von dynamisierten Darstellungsumgebungen

In Anlehnung an Vahey, Knudsen, Rafanan & Lara-Meloy (2013, S. 19-20) bezeichnen dynamisierte Darstellungsumgebungen die computergestützte Einbettung mathematischer Beziehungen in interaktiv manipulierbare digitale Objekte. Analog dazu werden unter dynamisierten Darstellungsumgebungen in diesem Beitrag die computergestützte Aufbereitung von einer oder mehreren Darstellungen von einem oder mehreren mathematischen Objekten verstanden. Dynamisierte Darstellungsumgebungen realisieren ferner mathematische Beziehungen oder funktionale Abhängigkeiten der dargestellten Objekte in der Art, dass Änderungen an einem dargestellten Objekt automatisch auf davon abhängige, dargestellte Objekte übersetzt werden (vgl. „dyna-linking" in Ainsworth, 2006 oder „hot linking" in Kaput, 1989). Änderungen an einem dargestellten Objekt sind durch interaktiv manipulierbare Darstellungselemente mit geringem Interaktionsgrad – etwa Schieberegler, per Drag & Drop verschiebbare Punkte oder einfache Text- und Zahleingaben – möglich (vgl. Schulmeister, 2002; Wörler, 2018).

Diese Definition umfasst etwa vorgefertigte Worksheets aus dynamischer Geometrie-Software, entsprechend aufbereitete Arbeitsblätter einer Tabellenkalkulation sowie Web- oder Smartphone-Apps, die eine Interaktion mit dynamisch verknüpften mathematischen Darstellungen erlauben. Explizit ausgeschlossen werden solche Arbeiten am Computer, bei denen die Schülerinnen und Schüler die Darstellungselemente selber konstruieren müssen.

Wie im vorangegangenen Abschnitt dargelegt, geht man davon aus, dass die Unterstützung des Lernprozesses durch eine computergestützte Darstellung dann besonders wirksam ist, wenn Gehalt oder Essenz von Lerngegenstand und Darstellungsmerkmalen korrespondieren (Salomon, 1979; Vessey, 1991). Die Korrespondenz besteht dann, wenn die computergestützte externe und die angebahnte interne Darstellung möglichst strukturgleich sind und für die Symbolsysteme der externen Darstellung gilt: „they [should] represent the information in better isomorphism with the specific modes of internal representation that a learner (with a given cognitive make-up and task) ought to generate.“ (Salomon, 1979, S. 137)

Diesem Argument folgend verspricht man sich durch dynamisierte Darstellungsumgebungen besonders lernwirksame Unterstützungsleistung, wenn mathematische Lerngegenstände mit dynamischem Gehalt im Mittelpunkt stehen. Darunter fallen etwa das Erfassen und Beschreiben von Änderungsverhalten von mathematischen Objekten (Roth, 2005), Lerngegenstände mit Bezügen zum Kovariationsaspekt (Vollrath, 1989) oder Begriffsbildung anhand dynamischer Phänomene, wie etwa Ortslinien (Weigand & Weth, 2010, 185-189). Dies liegt darin begründet, dass es zum zentralen Merkmal von dynamisierten Darstellungen zählt, dass sie Änderungsverhalten von mathematischen Objekten zugänglich machen können:

> *„Enabling students to manipulate mathematical objects, and supporting them in predicting, evaluating, and understanding the corresponding changes in the environment, are at the heart of effective uses of dynamic representations.“ (Vahey et al., 2013, S. 20)*

In ihrem Übersichtsartikel zu Chancen der Computerunterstützung im Mathematikunterricht diskutieren Pierce & Stacey (2010) daher auch explizit das Potenzial dynamisierter Darstellungsumgebungen bei Aufgaben zum Erfassen von Varianz und Invarianz. Sie identifizieren zahlreiche Beispiele, in denen Schülerinnen und Schüler die Computerunterstützung zur Exploration von Änderungsverhalten verwenden, etwa wenn sie Parameter durch Schieberregler verändern und Änderungsverhalten beobachten oder „Was passiert, wenn…?“-Untersuchungen in Tabellenkalkulationsprogrammen vornehmen (Pierce & Stacey, 2010, S. 8).

Empirische Indizien für diese These lassen sich in den Arbeiten von Rolfes (2018) finden, der in verschiedenen Studien den Einfluss von dynamisierten Darstellungen beim Lernen funktionalen Denkens untersucht. Er schließt aus seinen Studien unter anderem, dass die eingesetzten „dynamischen Repräsentationen [eine] Art Scaffolding für die Konstruktion von adäquaten mentalen Modellen […] darstellten“ (Rolfes, 2018, S. 210), indem sie – im Gegensatz zu statischen Darstellungen – anspruchsvolle mentale Simulationen von dynamischen Vorgängen unterstützen können.

Es zeichnet sich ab, dass Lerngegenstände mit Bezug zum Änderungsverhalten mathematischer Objekte im Mittelpunkt stehen sollten, wenn Überlegungen zum Einsatz dynamisierter Darstellungsumgebungen angestellt werden. Im folgenden Abschnitt werden diese Lerngegenstände aus stoffdidaktischer Perspektive betrachtet, um sie für eine Analyse mit Blick auf potentiell unterstützungsbedürftige mathematische Operationen zugänglich zu machen.

Charakteristika von Lerngegenständen der Mathematik mit dynamischem Gehalt

Aus fachmathematischer Perspektive liegt einer jeden Betrachtung des Änderungsverhaltens von mathematischen Objekten ein impliziter funktionaler Zusammenhang zugrunde. Diese Beobachtung wurde bereits von Vollrath, 1989) in seinen Abhandlungen zum *Funktionalen Denken* wiedergegeben. In der systematischen Betrachtung von Änderungen wird demnach ein Weg gesehen, „auf eine neue Weise mathematische Einsicht zu vermitteln und Verständnis zu erzielen“. In der Idee der systematischen Änderungen liegt die Verbindung zum Begriff des funktionalen Denkens (Vollrath, 1989, S. 13).

Die enge Verbindung der Betrachtungen von Änderungsverhalten und funktionalen Zusammenhängen begründet sich daraus, dass eine Veränderung eines Objekts immer aus Änderungen von Einflussparametern hervorgehen muss. Dieser Einfluss lässt sich als funktionaler Zusammenhang modellieren und mathematische Objekte *funktional* verstanden werden. Dabei werden Variationen der Einflussparameter in Kovariationen des abhängigen mathematischen Objekts übersetzt.

Aus dieser stoffdidaktischen Betrachtung lassen sich die mathematischen Tätigkeiten charakterisieren, die beim Erfassen und Beschreiben von Änderungsverhalten relevant werden. Betrachtet man die Abhängigkeit des sich verändernden mathematischen Objekts, bezogen auf einen Einflussparameter, als Ausdruck eines funktionalen Zusammenhangs, so bilden die Variationen des Einflussparameters den Definitionsbereich. Analog bilden die daraus resultierenden Kovariationen des Objekts den Wertebereich. Um die Größe oder das Ausmaß der jeweiligen Änderungen erfassen zu können, benötigt man im Definitions- und Wertebereich einen (mindestens naiven oder heuristischen) Abstandsbegriff. Außerdem muss die resultierende Zuordnung von Variation und Kovariation zu einem gewissen Grad systematisierbar sein, damit das Änderungsverhalten erfasst und beschrieben werden kann.

Aus dieser mathematischen Analyse ergeben sich für Aufgaben zum Erfassen und Beschreiben von Änderungsverhalten die folgenden zu bewältigenden mathematischen Tätigkeiten:

(1) Wahl oder Konstruktion eines Startwerts für den Einflussparameter

(2) Durchführen einer Änderung des Einflussparameters

(3) Erfassen des Ausmaßes einer durchgeführten Änderung des Einflussparameters

(4) Wahl oder Konstruktion eines mathematischen Objekts des zu betrachtenden Typs

(5) Durchführen einer Änderung des mathematischen Objekts

(6) Erfassen des Ausmaßes einer durchgeführten Änderung des mathematischen Objekts

(7) Auswertung der funktionalen Abhängigkeit, also die Konstruktion des mathematischen Objekts bei vorgegebenem Parameter

(8) Vergleich der jeweiligen Änderungen von Einflussparameter und mathematischem Objekt und damit die Erfassung der kovariationsbezogenen Eigenschaften der Funktion.

Die Nummerierung dieser Tätigkeiten soll hier keine notwendige Schrittfolge implizieren und dient nur zum Referenzieren im unteren Teil dieses Beitrags. In einer Aufgabe zum Erfassen und Beschreiben von Änderungsverhalten müssen auch nicht notwendigerweise alle diese Tätigkeiten gefordert sein.

Kovariationsbezogene Aufgabenanalyse und supplantationsbezogene Darstellungsanalyse

Die in den ersten Abschnitten dieses Beitrags betrachteten Unterstützungspotenziale von dynamisierten Darstellungsumgebungen werden meist auf abstrakter Aufgabenebene diskutiert oder auf mentale Operationen bezogen, die nicht in einen konkreten Aufgabenkontext eingebunden sind. Unter Berücksichtigung der im vorangegangenen Abschnitt herausgearbeiteten Charakteristika für Aufgaben zum Erfassen und Beschreiben von Änderungsverhalten erscheint eine fundierte Analyse der Passung von Mathematikaufgabe und dynamisierter Darstellungsumgebung als Hilfsmittel möglich. Eine solche kovariationsbezogene Aufgabenanalyse bei gleichzeitiger supplantationsbezogener Darstellungsanalyse wird in diesem Abschnitt entwickelt und anhand einer konkreten Schulbuchaufgabe inklusive einem konkreten Vorschlag zur Unterstützung durch ein Computerapplet exemplifiziert.

Kovariationsbezogene Analyse einer Schulbuchaufgabe

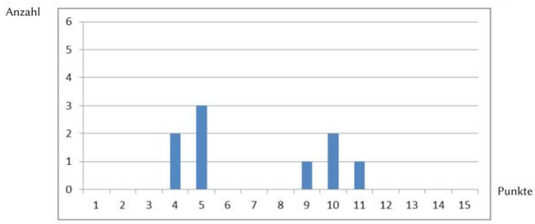
Für eine kovariationsbezogene Aufgabenanalyse muss zunächst diskutiert werden, welche der abstrakt beschriebenen mathematischen Tätigkeiten zum Erfassen und Beschreiben von Änderungsverhalten in dem Aufgabenkontext relevant sind und wie sich diese dort konkretisieren. Eine solche Diskussion wird hier anhand der in Abb. 1 gezeigten

Schulbauchaufgabe exemplarisch durchgeführt. Die Aufgabe wurde aus einem Schulbuch für die neunte Jahrgangsstufe der Realschule (Baum & Kopp, 2007, S. 119) entnommen, wo sie ohne Hilfsmittel zur Bearbeitung dargeboten wird.

Neun Schülerinnen und Schüler haben als Team bei einem Mathewettbewerb mitgemacht und die folgenden Einzelpunkte erzielt:

4	4	5	5	5	9	10	10	11

Damit haben Sie als Team im Durchschnitt 6 Punkte erzielt. Der Median beträgt 5 Punkte. Die Anzahl der erreichten Punktzahlen des Teams werden in einem Histogramm dargestellt.



(a) Verändere die Punktzahlen von vier Schülerinnen oder Schülern so, dass sich der Median nicht ändert. Beschreibe, wie du dabei vorgegangen bist.

(b) Verändere die Punktzahlen von vier Schülerinnen oder Schülern so, dass sich der Mittelwert nicht ändert. Beschreibe, wie du dabei vorgegangen bist.

Abb. 1: Von den Autoren adaptierte Schulbuchaufgabe zum Änderungsverhalten von statistischen Mittelwerten.

In der hier betrachteten Schulbuchaufgabe steht das Änderungsverhalten der statistischen Lageparameter – Median und arithmetisches Mittel – im Zentrum. Mit Blick auf den funktionalen Zusammenhang, der dem Änderungsverhalten zugrunde liegt, werden die diskrete Verteilung bzw. einzelne Datenpunkte der Verteilung als Einflussparameter identifiziert. Die Wahl oder Konstruktion von initialen Parametern und Objekten ist durch Aufgabenstellung bereits realisiert. Von den acht abstrakt formulierten mathematischen Tätigkeiten werden fünf als relevant identifiziert und entsprechend in den Aufgabenkontext übersetzt:

(2) Variation der Verteilung durch Änderungen von Einzeldaten

(3) Vergleich zweier Verteilungen auf Basis der Gesamtheit der Einzeldaten (evtl. durch visuellen Vergleich zweier Histogramme)

(6) Vergleich zweier Verteilungen auf Basis der statistischen Kenngrößen

(7) Bestimmung oder Berechnung von Median und arithmetischem Mittelwert einer gegebenen Verteilung

(8) Vergleich der Veränderungen der Einzeldaten und der statistischen Kenngrößen und Erfassung des Änderungsverhaltens von Median und arithmetischem Mittel.

Die Tätigkeit (7) verlangt die händische Berechnung des Mittelwerts. Fasst man unter Tätigkeit (2) auch die Erstellung des resultierenden Histogramms, so verlangen die Tätigkeiten (2) und (7) den höchsten Rechenleistungs- oder Zeitbedarf. Für die Lösung der Aufgabe sind jedoch die Tätigkeiten (3) und (8) von zentraler Bedeutung, da dort bewusste und zielgerichtete Variationen der Verteilung mit Auswirkung auf die statistischen Kenngrößen verlangt werden.

Supplantationsbezogene Analyse einer dynamisierten Darstellungsumgebung im Aufgabenkontext

In diesem Abschnitt wird die Analyse in der Art fortgesetzt, dass der Einsatz einer dynamisierten Darstellungsumgebung als Hilfsmittel für die Aufgabenbearbeitung antizipiert wird. Wurden im vorherigen Schritt die für die Aufgabe relevanten Einflussparameter und abhängigen mathematischen Objekte identifiziert, so können gezielt dynamisierte Darstellungsumgebungen konstruiert oder ausgesucht werden, die genau diese funktionale Abhängigkeit realisieren.

Ist eine solche Darstellungsumgebung gefunden oder entwickelt, kann diskutiert werden, welche der relevanten mathematischen Tätigkeiten durch die dynamisierte Darstellungsumgebung unterstützt wird.

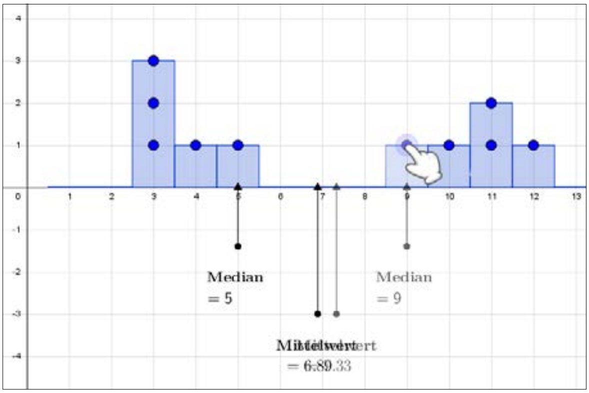


Abb. 2: Von den Autoren mit GeoGebra erstellte dynamisierte Darstellungsumgebung zum Änderungsverhalten von statistischen Mittelwerten.

Um auch diesen Teil der Analyse an einem konkreten Beispiel aufzuzeigen, wird die in Abb. 2 gezeigte dynamisierte Darstellungsumgebung als Hilfsmittel für die Aufgabenbearbeitung betrachtet. Das dargestellte Computerapplet beinhaltet die Darstellung der diskreten Verteilung in Form eines Histogramms mit integrierter Darstellung der einzelnen Datenpunkte. Außerdem werden die Mittelwerte der Verteilung sowohl numerisch als auch ikonisch durch eine entsprechende Markierung auf dem Zahlenstrahl bzw. der horizontalen Achse des Histogramms abgebildet. Die Darstellung des funktionalen Zusammenhangs wird realisiert, indem die einzelnen Datenpunkte im Histogramm mit der Maus verschoben werden können. Dadurch werden Variationen der Verteilung durch direkte Manipulation des Histogramms möglich. Dynamisch werden dabei die entsprechenden Werte von Median und arithmetischem Mittel aktualisiert, sodass deren Kovariation sowohl im numerischen Wert als auch in der ikonischen Markierung sichtbar werden.

Das Computerapplet in Abb. 2 unterstützt die Durchführung der mathematischen Tätigkeiten (2) und (7), da die Manipulation von Einzeldaten direkt möglich ist und die jeweiligen Kenngrößen automatisch berechnet werden. Indirekt bietet das Applet zudem leichte Unterstützung für die Tätigkeiten (3) und (6). Durch die automatische Aktualisierung der Darstellungselemente (Histogramm, Markierungen auf der horizontalen

Achse) wird die Erfassung der Änderungen zwar vereinfacht, jedoch nicht komplett extern modelliert.

Lernzielbezogene Analyse der Passung von Mathematikaufgabe und dynamisierter Darstellungsumgebung

Zum Abschluss der Analyse muss die Unterstützungsleistung der dynamisierten Darstellungsumgebung für die Aufgabe bezogen auf den zu erwartenden Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler bewertet werden. Eine solche Bewertung kann sich aber nicht allein auf die Unterstützung bei der Aufgabenbearbeitung beziehen, sondern muss auch den Lerngegenstand bzw. das Lernziel der rahmenden Unterrichtssequenz mit in den Blick nehmen. So wird man zu einer anderen Einschätzung kommen, wenn die Automatisierung der Berechnungs- und Bestimmungsverfahren für Median und Mittelwert als Lernziel gesetzt wird, als wenn ein Lernziel verfolgt wird, dass dem dynamischen Gehalt der Aufgabe gerecht wird.

Exemplarisch wird die Aufgabe vor dem Hintergrund des folgenden Lernziels diskutiert, welches sich explizit auf das Änderungsverhalten bezieht: Die Schülerinnen und Schüler erfassen und beschreiben qualitativ die Robustheit von arithmetischem Mittelwert und Median gegenüber Änderungen in der Datengrundlage. Dieses Lernziel steht im weiteren Zusammenhang mit dem Durchdringen des Mittelwertbegriffs (siehe Eichler & Vogel, 2013, S. 43-47).

Mit Blick auf dieses Lernziel erscheinen die Tätigkeiten (2) und (7) kaum relevant. Die Tätigkeiten (3) und (6) bilden die Grundlage für Tätigkeit (8), die wiederum zentral für das Lernziel ist. Vergleicht man die Lernzielrelevanz der mathematischen Tätigkeiten mit der Unterstützungsleistung des Computerapplets unter Berücksichtigung des jeweiligen Zeit- oder Rechenbedarfs, so verspricht der Einsatz des Computerapplets und somit einer dynamisierten Darstellungsumgebung einen positiven Einfluss auf den Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler. Für das Lernziel irrelevante Tätigkeiten werden ausgelagert und relevante Tätigkeiten unterstützt. Mit Blick auf den Supplantationseffekt bzw. den Effekt des Computational Offloading ist erwartbar, dass kognitive Ressourcen auf die zentralen Tätigkeiten konzentriert werden können.

Die hier aufgezeigte Analyse und Argumentation liefert Ansätze einer Entscheidungsheuristik für die Funktion von dynamisierten Darstellungsumgebungen bei der Bearbeitung von Aufgaben zum Änderungsverhalten.

Heuristische Funktionen des Analyseansatzes

In diesem letzten Abschnitt des Beitrags wird die Einbettung des vorgestellten Analyseansatzes für die Passung von Mathematikaufgabe und Computerunterstützung in die Unterrichtsplanung diskutiert. Ist gemäß der Analyse eine dynamisierte Darstellungsumgebung in der Lage eine bestimmte mathematische Tätigkeit im Aufgabenkontext zu unterstützen, so sollte geprüft werden, welche Rolle diese Tätigkeit im Lernprozess einnimmt und mit welcher Belastung die Durchführung ohne den Computer verbunden wäre. Ausgehend von dieser Prüfung ergibt sich das folgende heuristische Entscheidungsmodell für die erwartete Funktion der Computerunterstützung bei der Aufgabenbarbeitung.

Das heuristische Entscheidungsmodell basiert auf der Bewertung der einzelnen mathematischen Tätigkeiten im Aufgabenkontext. Die Bewertung erfolgt dabei bezüglich der Dimensionen Zeit- oder Rechenaufwand (A) und Lernzielrelevanz (Z) sowie der Frage, ob die einzelne mathematische Tätigkeit von der computergestützten Darstellung unterstützt wird. Für den Fall einer unterstützten Tätigkeit ist dieses Modell in Abb. 3 dargestellt.

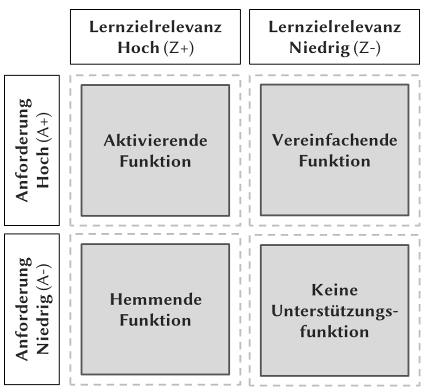


Abb. 3: Heuristisches Entscheidungsmodell zur Funktion der Computerunterstützung in Abhängigkeit von Anforderung und Lernzielrelevanz der unterstützten mathematischen Tätigkeit.

Ist die Relevanz einer der unterstützten mathematischen Tätigkeiten bezogen auf das Lernziel hoch, der rechenbezogene oder zeitliche Aufwand jedoch niedrig (Z+, A−), so sollte die Möglichkeit eines lernprozess-hemmenden Effekts diskutiert werden (vgl. Schnotz, 2002). Würde die oben diskutierte Aufgabe zur Automatisierung der Berechnungs- und Bestimmungsverfahren für Median und Mittelwert eingesetzt werden, so würde man demnach einen solchen lernprozess-hemmenden Effekt erwarten. Die Bestimmungs- bzw. Berechnungstätigkeit hätte hohe Lernzielrelevanz, würde jedoch unterstützt (sogar komplett ausgelagert).

Wenn die Relevanz der unterstützten Tätigkeit niedrig und die Anforderung hoch ist (Z−, A+), so ist die Erwägung eines positiv vereinfachenden Effekts plausibel (vgl. Betrancourt, 2005). Dies entspricht der im oberen Abschnitt exemplifizierten Analyse.

Sind Relevanz und Anforderung gleichzeitig hoch (Z+, A+), so kann die Externalisierung eine aktivierende Funktion (Bauer, 2015, S. 40-43) besitzen, sodass sich Lerngegenstand und Lernprozess der Aufgabe grundsätzlich ändern könnten. In diesem Fall sollten Lehrkräfte reflektieren, welche die Vorteile zusätzlich ermöglichter kognitiver Prozesse und die Nachteile erhöhter kognitiver Belastung berücksichtigt.

Wird eine lernzielirrelevante Tätigkeit unterstützt, die auch ohne den Computer keinen hohen Aufwand hätte (Z−, A−), so ist davon auszugehen, dass keine Unterstützungsfunktion besteht.

Diskussion und Ausblick

Limitationen des entwickelten Analyseansatzes

Der in diesem Beitrag entwickelte Analyseansatz nimmt eine auf funktionale Zusammenhänge abstrahierte und auf Änderungsverhalten fokussierte Perspektive ein. Damit bleibt er blind für nicht-supplantationsbezogene Merkmale der computergestützten Darstellungen. So erfolgt in der Analyse keine Betrachtung von etwaigen Wahrnehmungsfallen und Fehlvorstellungen (Pinkernell & Vogel, 2016), die durch die Dynamisierung der Darstellungselemente entstehen können. Genauso fehlt etwa die Berücksichtigung der Flüchtigkeit von

Momentankonfigurationen (Leutner, Opfermann & Schmeck, 2014), denen mit expliziten Beobachtungs- oder Begründungsaufträgen in der Aufgabenstellung begegnet werden kann.

Der Analyseansatz diskutiert primär die Darstellung von mathematischen Objekten und Operationen. Er berücksichtigt Übersetzungsleistungen zwischen verschiedenen Darstellungen (Kaput, 1989) nur implizit. Bezogen auf die in Abb. 2 gezeigte Computerumgebung floss etwa das hohe Maß an Darstellungsintegration (gleichzeitige numerische Darstellung der Mittelwerte) nicht in die Analyse ein.

Ausblick für weitere Arbeiten

Mögliche Theoriestränge zur Weiterentwicklung des Analyseansatzes ergeben sich aus den diskutierten Limitationen. Darüber hinaus bietet sich die Berücksichtigung prediktionsbezogener Kognitionsmodelle (Lowe & Ploetzner, 2017, S. 14) als Ergänzung zur Perspektive der aktiven Informationsverarbeitung an. Eine empirische Überprüfung des Analyseansatzes und dessen Praxistauglichkeit stehen noch aus.

Literatur

Ainsworth, S. (2006). DeFT. A conceptual framework for considering learning with multiple representations. Learning and Instruction, 16 (3), 183-198.

Bauer, A. (2015). Argumentieren mit multiplen und dynamischen Repräsentationen. Würzburg: University Press

Baum, D. & Kopp, M. (2007). XQuadrat / A. Mathematik 5. München: Oldenbourg.

Betrancourt, M. (2005). The animation and interactivity principles in multimedia learning. In Mayer, R. (Hrsg.), The Cambridge Handbook of Multimedia Learning (S. 287-296). Cambridge: Cambridge University Press.

Chandler, P. & Sweller, J. (1991). Cognitive Load Theory and the format of instruction. Cognition and Instruction, 8 (4), 293-332.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61 (1-2), 103-131.

Eichler, A. & Vogel, M. (2013). Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik. Wiesbaden: Springer.

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbolic systems of algebra. In Wagner, S. (Hrsg.), Research issues in the learning and teaching of algebra (Research agenda for mathematics education, Volume 4, S. 167-194). Hillsdale NJ: Erlbaum.

Leutner, D., Opfermann, M. & Schmeck, A. (2014). Lernen mit Medien. In Seidel, T. & Krapp, A. (Hrsg.), Pädagogische Psychologie: mit Online-Materialien, S. 297-322). Weinheim: Beltz.

Lowe, R. & Ploetzner, R. (2017). Learning from Dynamic Visualization. Cham: Springer International Publishing.

Mayer, R. E. (2009). Multimedia learning. Cambridge: Cambridge University Press.

Pierce, R. & Stacey, K. (2010). Mapping Pedagogical Opportunities Provided by Mathematics Analysis Software. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15 (1), 1-20.

Pinkernell, G. & Vogel, M. (2016). DiaLeCo – Lernen mit dynamischen Multirepräsentationen von Funktionen. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2016: Vorträge auf der 50. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 07.03.2016 bis 11.03.2016 in Heidelberg. Münster: WTM-Verlag.

Rolfes, T. (2018). Funktionales Denken. Empirische Ergebnisse zum Einfluss von statischen und dynamischen Repräsentationen. Wiesbaden: Springer.

Roth, J. (2005). Bewegliches Denken im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Salomon, G. (1972). Can we affect cognitive skills through visual media? An hypothesis and initial findings. AV Communication Review, 20 (4), 401-422.

Salomon, G. (1979). Media and symbol systems as related to cognition and learning. Journal of Educational Psychology, 71 (2), 131-148.

Scaife, M. & Rogers, Y. (1996). External cognition: how do graphical representations work? International Journal of Human-Computer Studies, 45 (2), 185-213.

Schnotz, W. (2002). Wissenserwerb mit Texten, Bildern und Diagrammen. In L. Issing, L. & Klimsa, P. (Hrsg.), Information und Lernen mit Multimedia und Internet (S. 64-81). Weinheim: Beltz.

Schnotz, W. & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. Learning and Instruction, 13 (2), 141-156.

Schulmeister, R. (2002). Taxonomie der Interaktivität von Multimedia - ein Beitrag zur aktuellen Metadaten-Diskussion. it + ti. Informationstechnik und Technische Informatik, 44 (4), 193-199.

Vahey, P., Knudsen, J., Rafanan, K. & Lara-Meloy, T. (2013). Curricular activity systems supporting the use of dynamic representations to foster students' deep understanding of mathematics. In Mouza, C. & Lavigne, N. (Hrsg.), Emerging Technologies for the Classroom: A Learning Sciences Perspective (S. 15-30). New York, NY: Springer.

Vessey, I. (1991). Cognitive fit. A theory-based analysis of the graphs versus tables literature. Decision Sciences, 22 (2), 219-240.

Vogel, M., Girwidz, R. & Engel, J. (2007). Supplantation of mental operations on graphs. Computers & Education, 49 (4), 1287-1298.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. Journal für Mathematik-Didaktik, 10 (1), 3-37.

Weigand, H.-G. & Weth, T. (2010). Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Wörler, J. F. (2018). Externe Repräsentation und Variationsvielfalt als Kriterien zur Differenzierung von digitalen Simulationen. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2018: Vorträge auf der 50. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 05.03.2018 bis 09.03.2018 in Paderborn. Münster: WTM-Verlag. Münster: WTM.

DiWerS: Ein Fachdidaktik-Seminar zum Einsatz digitaler Lernpfade in der Schule

Elena Jedtke, Corinna Hankeln

Die Integration digitaler Werkzeuge in den Mathematikunterricht bietet viele Möglichkeiten, Lernende für mathematische Probleme zu interessieren und sie entsprechend ihrem aktuellen Lernstand zu fördern. Gleichzeitig erfordert die Nutzung digitaler Werkzeuge eine Adaption üblicher Lehrformen und erweiterte Fähigkeiten von Lehrkräften. Daher erscheint der Erwerb professioneller Kompetenzen zum Lehren mit digitalen Werkzeugen bereits in der ersten Phase der Lehrerbildung sehr sinnvoll. Aus dieser Motivation heraus wird an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster (WWU Münster) seit dem Wintersemester 2017/18 in Kooperation mit einer Gesamtschule das Fachdidaktik-Seminar „Digitale Werkzeuge in der Schule“ (DiWerS) durchgeführt, bei dem Studierende für die kooperierenden Schülerinnen und Schüler einen Lernpfad entwickeln, welchen sie in Praxissitzungen erproben und anschließend reflektieren.

Digitales Lernen in der Lehrerbildung

Der erste Abschnitt stellt die Relevanz des digitalen Lernens für die Lehrerbildung heraus. Damit einhergehend entwickelte sich die Motivation für die Konzeption des Fachdidaktik-Seminar DiWerS.

Unter digitalem Lernen wird allgemein die Gestaltung einer Lernumgebung mittels digitaler Medien verstanden (Arnold, Kilian, Thillosen & Zimmer 2015). Die Inhalte werden demnach multimedial und interaktiv zur Verfügung gestellt und der Lernprozess kann durch die Strukturen innerhalb der Lernumgebung mehr oder weniger gesteuert werden – in Abhängigkeit davon, welche Lernform im Fokus der Bearbeitung stehen soll (vgl. Jedtke 2018).

Im Jahr 2016 trat digitales Lernen vermehrt in das Bewusstsein der Öffentlichkeit. BMBF (2016) und KMK (2016) veröffentlichten Papiere zur „Bildung in der digitalen Welt“, in denen der Einsatz digitaler Bildungsmedien in Schule und Weiterbildung thematisiert wird. Es werden unter anderem Instrumente für digitales Lernen angeführt, von denen in dieser Arbeit vor allem die so genannten Open Educational Resources (OER) im Fokus stehen. OER sind Materialien, die sich insbesondere dadurch auszeichnen, dass sie kostenlos und für jeden zugänglich digital zur Verfügung stehen (vgl. OECD 2007). Neben der Benennung von Potentialen und Handlungsfeldern im Bereich digitaler Bildungsmedien, nimmt die akademische Bildung eine zentrale Rolle im Beschluss der KMK (2016) ein. Dies betrifft sowohl die Aus-, Fort- und Weiterbildung von Lehrkräften als auch die Anforderungen an Lehrende der Universitäten, um nur einige Aspekte zu nennen. Lehrende an Universitäten sollen „digitale Technologien in ihre Lehre integrieren, soweit dies den Erwerb und Ausbau umfassender Handlungskompetenzen im Umgang mit digitalen Technologien […] unterstützt“ (KMK 2016, S. 45). Die Studierenden sollen durch die Nutzung, die Erstellung und die Reflexion des Einsatzes digitaler Technologien in die Lage versetzt werden, selbstständig abwägen zu können, wann und in welcher Weise digitale Bildungsmedien sinnvoll eingesetzt werden können. Damit einhergehend soll eine kritische Reflexion des didaktisch sinnvollen Einsatzes antizipiert werden. Als besonderer Fokus für die Lehrerbildung werden von der KMK (2016) die Chancen für den inklusiven Unterricht sowie für die individuelle Förderung von Schülerinnen und Schülern hervorgehoben.

Laut KMK (2017) lassen sich die Kompetenzen, die für verständigen Umgang mit digitalen Medien nötig sind in folgende sechs Bereiche aufteilen: „Suchen, Verarbeiten und Aufbewahren“, „Kommunizieren und Kooperieren“, „Produzieren und Präsentieren“, „Schützen und sicher agieren“, „Problemlösen und Handeln“ sowie „Analysieren und Reflektieren“.

Lernpfade

Im Folgenden gehen wir auf den Begriff des Lernpfades ein. Im Seminar DiWerS wird ein solcher von den Studierenden entworfen und Lernpfade stellen somit einen wichtigen Aspekt des Seminars dar.

Im DiWerS-Seminar wird die Definition für Lernpfade von Roth (2015) aufgegriffen. Demnach stellen Lernpfade internetbasierte Lernumgebungen dar, in denen die Schülerinnen und Schüler zum eigenverantwortlichen Lernen angeregt werden. Die Inhalte werden in einer Bausteinstruktur angeordnet und bieten insgesamt strukturierte Pfade durch interaktive

Materialien an, aus denen die Lernenden ihrem eigenen Leistungsstand entsprechende Aspekte auswählen können. Zur Unterstützung der individuellen Lernprozesse werden Hilfen, Feedback sowie Aufforderungen zu Tätigkeiten wie dem Formulieren von Vermutungen oder zur Reflexion in einen Lernpfad integriert.

Lernpfade, die dieser Definition entsprechen, können auf den Seiten der Zentrale für Unterrichtsmedien im Internet e.V. (ZUM) gefunden bzw. selbst erstellt werden. Im Rahmen des DiWerS-Seminars wird die zur ZUM-Familie gehörende Plattform Projektwiki[2] genutzt. Lehrkräfte und Dozenten können dort eine Projektseite beantragen und erhalten Administrationsrechte, um z. B. selbst Benutzerkonten für die Studierenden anlegen zu können. Lernpfade, die im Rahmen des Seminars DiWerS entstehen, werden als Unterseiten zur Projektseite angelegt, so dass die Zugehörigkeit bzw. der Rahmen der Entstehung transparent ist.

Konzeption des Seminars DiWerS

In den folgenden Abschnitten wird näher auf die Konzeption des Seminars eingegangen. Dafür wird zunächst der institutionelle Rahmen an der WWU Münster dargelegt. Im Anschluss werden die Ziele des Seminars und damit einhergehend das allgemeine Seminarkonzept erläutert, bevor in einem letzten, ausführlicheren Teil konkret auf die Seminargestaltung im Rahmen einer Semesterübersicht eingegangen wird.

Institutioneller Rahmen

Das Seminar DiWerS richtet sich an Studierende, die für das Fach Mathematik im *Master of Education* für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen an der WWU Münster immatrikuliert sind. Im Rahmen dieses Studiums belegen die Studierenden insgesamt drei Module zuzüglich des Praxissemesters und ggf. einer Masterarbeit im Fach Mathematik. Die Module teilen sich in zwei fachmathematische sowie einen fachdidaktischen Studienbaustein auf. Das Seminar DiWerS wird mit einem Workload im Rahmen von 3 von insgesamt 11 Leistungspunkten (entspricht 90 h Arbeit) dem letztgenannten Modul zugeordnet (WWU Münster, 2013). Das

2 Link zum Projektwiki: http://projektwiki.zum.de/wiki/Hauptseite

DiWerS-Seminar kann als eines von insgesamt drei unterschiedlichen Seminaren gewählt werden.

Seminarkonzept

Im Rahmen der Lehramtsausbildung an der WWU Münster verfolgt das neu konzipierte Seminar DiWerS das Ziel, die Diagnosekompetenzen angehender Lehrkräfte zu fördern. Gleichzeitig werden in diesem Seminar die Aufgabengestaltung und -bewertung fokussiert, insbesondere im Zusammenhang mit der Verwendung digitaler Werkzeuge. Ziel ist dabei, dass Lehramtsstudierende einen Einblick in das Unterrichtsmedium Lernpfad erhalten und Hemmnisse diesem gegenüber abbauen.

Bei dem DiWerS-Seminar handelt es sich nicht um eine klassische, rein universitäre Lehrveranstaltung, sondern es werden auch praktische Phasen in Zusammenarbeit mit einer Gesamtschule integriert. Aus diesem Grund werden mit dem Seminar auch auf schulischer Seite bestimmte Ziele verfolgt: So soll im Rahmen des Seminars Förderbedarf auf Seiten der Schülerinnen und Schüler, in den in Absprache mit der Schule ausgewählten Themenfeldern, festgestellt werden. Gleichzeitig soll im Rahmen der praktischen Sitzungen des Seminars den Lernenden die Möglichkeit gegeben werden, entsprechende Defizite aufzuarbeiten sowie gegebenenfalls ihr bereits vorhandenes Wissen zu vertiefen. Da die Arbeit am Lernpfad zum Großteil selbstständig mit Hilfe von Checklisten und Selbsteinschätzungen verläuft, steht auch die Förderung des eigenverantwortlichen Lernens im Vordergrund.

Seminargestaltung

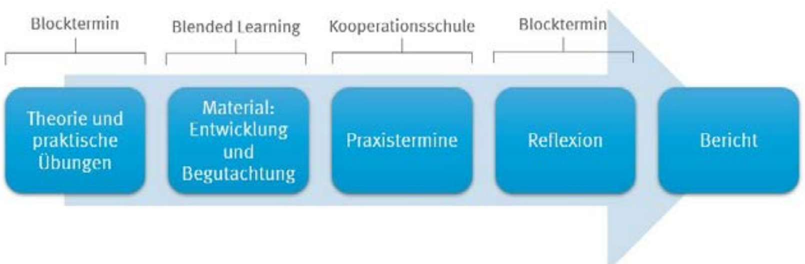


Abb. 1: Semesterverlaufsplan des Fachdidaktik-Seminars DiWerS

Das Seminar beginnt mit einer zweitägigen Blockveranstaltung, in der die Studierenden sich aus theoretischer Perspektive mit den relevanten Themen des Seminars auseinandersetzen (vgl. Abb. 1, Block 1). Nach einer kurzen Einführung in den Themenkomplex der Heterogenität sowie der Möglichkeiten zur Differenzierung und individuellen Förderung wird insbesondere die Aufgabengestaltung thematisiert. Ausgehend von der Frage, was eine gute Aufgabe auszeichnet werden unterschiedliche Kriterien erarbeitet (z.B. Leuders 2009), die den Studierenden in den anschließenden Phasen als Orientierung dienen können. Aus fachdidaktischer Perspektive werden zudem relevante Inhalte herausgearbeitet wie etwa Grundvorstellungen und typische Fehler. Dazu werden auch konkrete Aufgabenbeispiele analysiert und die Darstellung der behandelten Themen in Schulbüchern betrachtet. Diese Arbeit bildet somit die inhaltliche Grundlage sowohl für die Gestaltung der Aufgaben innerhalb des Lernpfads als auch für die Analyse der Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler. Um die Studierenden auch auf die methodischen Anforderungen bei der Beobachtung vorzubereiten, werden in dem theoretischen Block zudem Grundlagen der Beobachtung als wissenschaftliche Methode vermittelt und beispielsweise das designen von qualitativen oder quantitativen Beobachtungsbögen besprochen und geübt. Den Abschluss des theoretischen Blocks bildet eine Einheit zur Erstellung eines Lernpfads, in der sich die Studierenden aktiv mit der nötigen Syntax vertraut machen, zur Verfügung stehendes Hilfsmaterial für die eigenverantwortliche Arbeit kennenlernen und unter Anleitung auch erste eigene Aufgaben im Projektwiki gestalten.

Im Anschluss folgt eine *Blended-Learning* Phase, in welcher die Studierenden Materialien entwickeln, begutachten und überarbeiten (vgl. Abb. 1, Block 2). Die Kommunikation während dieser Zeit läuft schwerpunktmäßig über die universitätsinterne Plattform *Learnweb* sowie über das für das Seminar eingerichtetes Projektwiki (DiWerS 2017a). Zu Beginn dieser Phase haben die Studierenden drei bis vier Wochen Zeit, in Gruppen einen Teil des Seminar-Lernpfads zu erstellen. Dabei sollen sowohl Aufgaben zur Aufarbeitung von Schwächen (sogenannte „Förderaufgaben“) als auch anspruchsvollere „Forderaufgaben“ für bereits leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler erstellen. Bei Rückfragen zur technischen Umsetzung steht den Studierenden jederzeit das Forum im oben genannten *Learnweb* zur Verfügung, in dem sowohl die Studierenden einander helfen können als auch die Lehrenden unterstützen können. Die Qualität der entwickelten Lernpfade wird in einer Art Review-Verfahren überprüft. Nach der Erstellungsphase der Lernpfade beginnt die Reviewphase, in der jeder Lernpfad von einer jeweils anderen Gruppe begutachtet und in einem vorgegebenen Schema kommentiert wird. Zusätzlich erhalten alle Gruppen auch ein ausführliches Feedback der Lehrenden, in denen sowohl inhaltliche als auch methodische bzw. technische Hilfestellungen gegeben werden. Dabei werden zwar gravierende inhaltliche Fehler zwingend korrigiert, den Studierenden wird aber auch Freiraum zur Sammlung eigener Erfahrungen gewährt, indem nur auf mögliche kritische Aspekte hingewiesen wird und die Studierenden beobachten können, ob die vermuteten Probleme tatsächlich auftreten. Die Gruppen haben anschließend ein bis zwei Wochen Zeit die geforderten Änderungen zu reflektieren und gegebenenfalls zu implementieren. Kurz vor den praktischen Terminen an der Schule findet dann ggf. ein etwa 45-minütiges Gespräch zwischen den Lehrenden und den einzelnen Gruppen statt, bei dem die vorgenommenen Änderungen noch einmal besprochen werden können.

Zeitgleich mit der Erstellung der Lernpfadaufgaben sind die Studierenden außerdem dazu angehalten, Diagnose-Aufgaben im wahr/falsch-Format zu erstellen, die möglichst gut die Fähigkeiten abfragen, die mit den Lernpfadaufgaben vertiefend geübt werden können. Diese Aufgaben werden von den Studierenden an die Lehrenden des Seminars geschickt, welche die Aufgaben kommentieren und auf mögliche Schwierigkeiten hinweisen und gegebenenfalls begründete Verbesserungsvorschläge machen.

Über die Erstellung des Lernpfads und der Aufgaben hinaus, sind die Studierenden auch angehalten, sich einen Beobachtungsschwerpunkt zu überlegen und einen entsprechenden Dokumentationsbogen zu entwerfen. Dieser wird ebenfalls kommentiert und auf mögliche Schwierigkeiten in der Umsetzung hingewiesen.

Die Praxissitzungen finden an drei bis fünf Terminen in der kooperierenden Gesamtschule statt, jeweils in einer Doppelstunde (vgl. Abb. 1, Block 3). Die Studierenden sind verpflichtet, an zwei zuvor vereinbarten Terminen an den praktischen Sitzungen teilzunehmen und dabei jeweils eine Schülerin oder einen Schüler gemäß dem vorher festgelegten Schwerpunkt zu beobachten. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten in diesen Sitzungen eigenständig. Die Stunden finden entweder in dem jeweiligen Klassenraum unter Einsatz von iPads oder in den Computerräumen der Schulen statt. Die jeweilige Lehrkraft ist an den Terminen zwar ebenfalls anwesend, ist aber vor allem für organisatorische Fragen zuständig.

Im Anschluss an die Praxissitzungen findet ein erneuter Blocktermin mit den Studierenden statt, an dem die Erwartungen an die praktische Erprobung sowie die Beobachtungen reflektiert werden (vgl. Abb. 1, Block 4). Außerdem werden Konsequenzen für die eigene Lehrtätigkeit sowie für das eingesetzte Material diskutiert. Damit wird die von der Prüfungsordnung vorgegebene schriftliche Studienleistung bereits vorbereitet (vgl. Abb. 1, Block 5). In diesem Bericht präsentieren die Studierenden ihre Beobachtungen und leiten Konsequenzen für den Einsatz und die Gestaltung des Lernpfads ab. Für diesen circa 15-seitige Bericht pro Gruppe ist laut Studienordnung keine Benotung vorgesehen.

Beispiel-Lernpfad *Ableitungen üben und vertiefen*

Um die Ergebnisse eines Semesters anschaulich darzustellen, folgen in diesem Abschnitt Ausführungen zu einem der im Rahmen des Seminars entwickelten Lernpfade. Im Wintersemester 2017/18 belegten 17 Studierende das DiWerS-Seminar. Es wurde mit den Kursen der Qualifikationsphase kooperiert und das Thema Differenzialrechnung bearbeitet. Dabei handelte es sich um eine vertiefende Wiederholung dieses Themengebiets für die Schülerinnen und Schüler mit dem Ziel, die Grundlagen in diesem Bereich aufzufrischen vor der Beschäftigung mit der Integralrechnung.

Aufbau

Entsprechend der Behandlung der Themen im Schulbuch erstellten die Studierenden in Gruppenarbeit Lernpfad-Elemente zu den Themen:

- „Von der mittleren zur momentanen (lokalen) Änderungsrate“,
- „Die Steigung in einem Punkt – Die Ableitung als Tangentensteigung“,
- „Differenzen- und Differenzialquotienten verstehen und inhaltlich deuten“,
- „Graphisches Ableiten – Die Ableitung als Funktionsdetektor“ und
- „Die Ableitung im Sachkontext anwenden“ (DiWerS 2017a).

Den Kapiteln vorangestellt wurde ein Diagnosetest, bestehend aus 15 Aufgaben im Wahr-Falsch-Format. Die Diagnoseaufgaben wurden so in den Lernpfad eingebunden, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse selbst prüfen konnten. Es wurde ein Button integriert, durch dessen Aktivierung die korrekten Aufgabenlösungen angezeigt wurden. Die Studierenden entwarfen je drei Items in Abstimmung mit den Inhalten der fünf Kapitel, so dass ausgehend von den individuellen Ergebnissen der Schülerinnen und Schüler gezielt auf die Lernpfadkapitel verwiesen werden konnte. Die Entscheidung, welche Kapitel und Aufgaben tatsächlich bearbeitet wurden, lag vollständig in der Hand der Schülerinnen und Schüler. Zu jedem der oben genannten Lernpfad-Elemente wurden sowohl Förder- als auch Forderaufgaben entworfen, so dass auch leistungsstarke Schülerinnen und Schüler, die keine Probleme mit dem Diagnosetest hatten, ihr Wissen weiter vertiefen konnten.

Eine zusätzlich zum Lernpfad bereitgestellte analoge Checkliste ermöglichte den Schülerinnen und Schülern die selbstständige Überwachung des Lernprozesses. Neben dem Festhalten der Ergebnisse des Diagnosetests beinhaltete sie Kompetenzchecks für die einzelnen Lernpfad-Abschnitte und ein Abschlussfazit (Abb. 2). Hierbei sei angemerkt, dass an der kooperierenden Gesamtschule routinemäßig mit Checklisten dieses Formats gearbeitet wird, sie also für die Schülerinnen und Schüler eine gewohnte Ergänzung zur Organisation ihrer Lernprozesse darstellten.

Fülle den folgenden Kompetenzcheck für die Themen aus, die du im Lernpfad geübt hast:

Von der mittleren zur momentanen (lokalen) Änderungsrate	++	+	0	-	Mit dieser Aufgabe habe ich das geübt.
Ich kann eine durchschnittliche Änderung in einem Intervall bestimmen.					
Ich weiß in Sachaufgaben, ob ich die mittlere oder die momentane Änderung berechnen muss.					
Ich kann eine durchschnittliche Geschwindigkeit berechnen.					
Ich kann eine momentane Geschwindigkeit bestimmen.					

Abschluss-Fazit

	++	+	0	-
Wenn ich das wahr/falsch –Quiz jetzt noch einmal machen würde, glaube ich, dass ich mehr Aufgaben richtig beantworten würde.				
Ich muss noch üben, …				
… durchschnittliche und momentane Änderungen zu unterscheiden				
… mit Tangentensteigungen zu arbeiten				
… Differenzen- und Differenzialquotient zu interpretieren				
… graphisch abzuleiten				
… die Ableitung im Sachkontext anzuwenden				

Abb. 2: Ausschnitte aus der Checkliste zur Lernpfad-Arbeit.

Beispielaufgaben

Um einen Einblick in den Lernpfad *Ableitungen üben und vertiefen* bekommen zu können, werden im Folgenden zwei Beispielaufgaben gezeigt. Bei den beiden Aufgaben handelt es sich um eine Förder- und eine Forderaufgabe aus dem Lernpfad-Kapitel „Graphisches Ableiten – Die Ableitung als Funktionsdetektor“ (DiWerS 2017b).

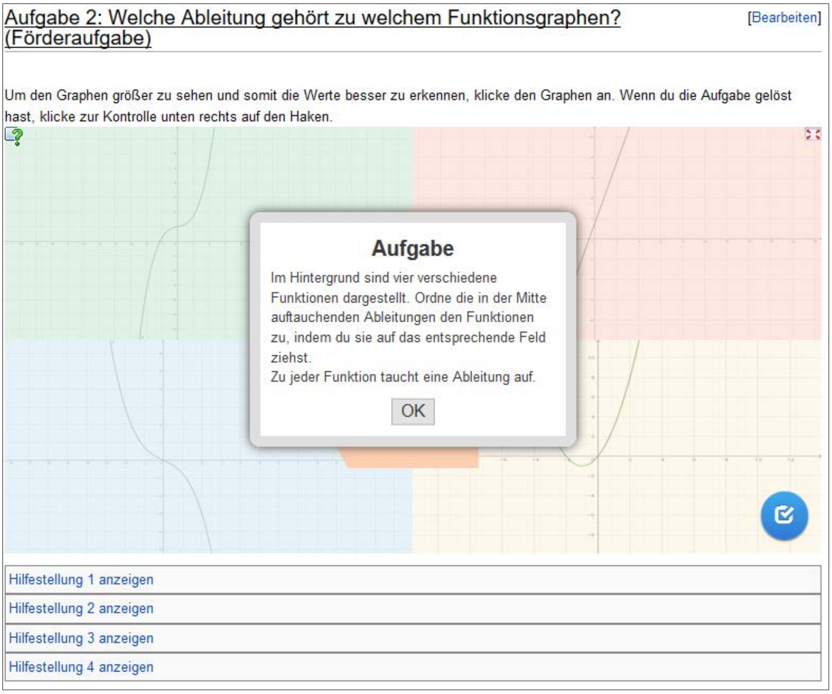


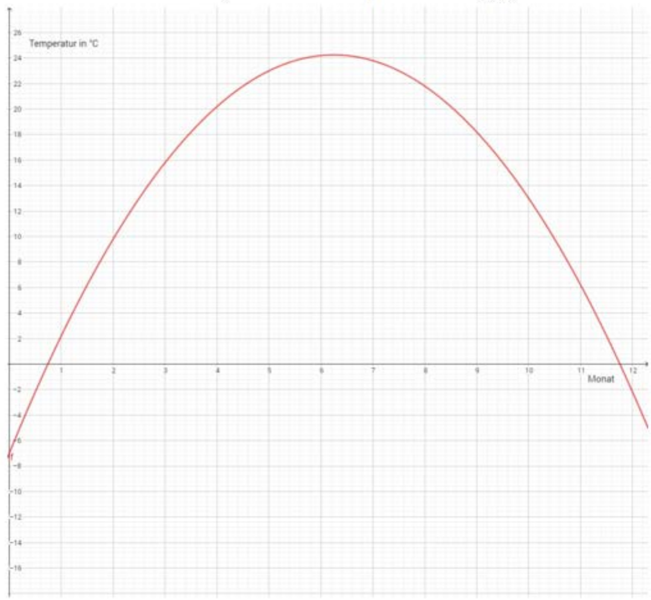
Abb. 3: Förderaufgabe aus dem Lernpfad-Kapitel „Graphisches Ableiten – Die Ableitung als Funktionsdetektor“ (DiWerS 2017b).

Die Aufgabe „Welche Ableitung gehört zu welchem Funktionsgraphen?“ ist eine exemplarische, interaktive Aufgabe, bei der Bilder von Graphen einer Ableitungsfunktion den im Hintergrund dargestellten Funktionsgraphen zugeordnet werden sollen (Abb.3). Dies geschieht durch bewegen der auftauchenden Bilder in den Bereich des jeweils als passend eingestuften Funktionsgraphen. Da es sich bei dieser Aufgabe um eine Förderaufgabe handelt, wurden von den Studierenden gestufte Hilfen eingebaut, welche durch Mausklick aufgeklappt und gelesen werden können. Hilfestellung 1 besagt beispielsweise: „Betrachte zunächst auffällige Punkte des Funktionsgraphen und versuche diese Punkte im Ableitungsgraphen wieder zu erkennen.“. In den darauf folgenden Hilfestellungen wird einzeln auf markante Punkte wie Nullstellen eingegangen. Dabei wird den Schülerinnen und Schülern je ermöglicht, sich selbst mit den besagten Punkten auseinanderzusetzen und anschließend eine allgemein formulierte Lösung angeboten. Der in Abb. 3 zu sehende Button in der rechten unteren Ecke der Zuordnungsaufgabe, dient schließlich zur Überprüfung der Korrektheit der konkret zugeordneten Ableitungsgraphen.

Aufgabe 5: Temperatur im Jahresverlauf (Forderaufgabe)

[Bearbeiten]

Der unten dargestellte Graph f stellt die durchschnittliche Tagestemperatur im Jahr 2016 in Deutschland dar. Auf der x-Achse sind die Monate von 0 bis 12 darstellt, wobei 0 den 1.Januar, 1 den 1.Februar, ..., 11 den 1.Dezember darstellt. Auf der y-Achse ist die Temperatur in °C angegeben.



a.) Zeichne den zugehörigen Ableitungsgraphen in dein Heft und beschreibe schrittweise, wie du ihn konstruiert hast. Was stellt der Ableitungsgraph im Sachkontext dar?

Abb. 4: Forderaufgabe aus dem Lernpfad-Kapitel „Graphisches Ableiten – Die Ableitung als Funktionsdetektor“ (DiWerS 2017b).

Die Aufgabe „Temperatur im Jahresverlauf“ ist ein Beispiel für eine analog zu bearbeitende Aufgabe. Die Schülerinnen und Schüler werden in Teilaufgabe a) dazu aufgefordert, den Ableitungsgraph zu der graphisch dargestellten Funktion aufzuzeichnen (Abb. 4). Weitere, hier nicht dargestellte Teilaufgaben fordern die Angabe des Monats, in dem die durchschnittliche Tagestemperatur am höchstens war sowie eine begründete Auseinandersetzung mit dem Ableitungsgraphen. Bei Aufgabe 5 wurden ebenfalls Hilfen und zusätzliche Lösungsvorschläge integriert, damit die Schülerinnen und Schüler in der eigenverantwortlichen Auseinandersetzung mit der Aufgabe jederzeit auf diese zurückgreifen und ihren Lernprozess selbstständig überwachen konnten. Die Aufgabe wurde als Forderaufgabe eingestuft, da insbesondere in der dritten Teilaufgabe, bei der begründeten Auseinandersetzung mit dem Ableitungsgraphen, die Grundvorstellung *Verstärkungsfaktor*[3] eine Rolle spielte und diese den Schülerinnen und Schülern nach Auskunft der Lehrkräfte in ihrem sonstigen Unterricht nicht bzw. nur wenig vermittelt werden konnte.

Fazit und Ausblick

Nach zweimaliger Durchführung des Seminars ist festzuhalten, dass die angehenden Lehrkräfte durch die Teilnahme am DiWerS-Seminar Gelegenheit zum Aufbau unterschiedlicher, von der KMK (2017) formulierter Kompetenzen erhalten: Durch die Zusammenarbeit in Gruppen und das *Blended Learning* interagieren die Studierenden mit Hilfe verschiedener digitaler Möglichkeiten (Mail und Forum), sie nutzen das Projektwiki zum Zusammenführen von Informationen und müssen zudem bei dem Review der anderen Lernpfade bei der digitalen Interaktion gewisse Umgangsregeln einhalten und ihre Kommunikation der schriftlichen Umgebung im Forum anpassen. Der Bereich des Produzierens und Präsentierens wird besonders angesprochen durch die Gestaltung des Lernpfads. Dabei sei besonders auf das Beachten rechtlicher Vorgaben hingewiesen, da die Studierenden insbesondere auf die Wahrung von Urheber- und Nutzungsrechten hingewiesen werden. Bei der Erstellung des Lernpfads müssen die Studierenden weiterhin problemlösend handeln und sowohl technische Probleme lösen als auch Werkzeuge bedarfsgerecht einsetzen. Besonders in der Vor- und Nachbereitung der Praxisphasen spielt dann auch die Analyse und Reflexion eine wichtige Rolle, da zunächst Medien kennengelernt, analysiert und bewertet werden und anschließend deren tatsächliche Verwendung reflektiert werden müssen.

3 Auf die Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff wird an dieser Stelle nicht weiter eingegangen, da dies den Rahmen des Artikels sprengen würde. Zur weiteren Lektüre sei auf das Buch „Didaktik der Analysis“ von Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand (2016) verwiesen.

Insgesamt ist der Fokus des Seminars in Bezug auf digitale Bildung besonders bei den angehenden Lehrkräften zu sehen, wohingegen die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler das Medium Lernpfad zwar nutzen, aber eher inhaltlich an den mathematischen Kompetenzen arbeiten. In Bezug auf diese ist festzustellen, dass es die Schülerinnen und Schüler durchaus vor Herausforderungen stellte, selbstständig an dem Material zu arbeiten. Jedoch wurden sie größtenteils durch die Interaktivität des Lernpfads durchaus zu einer Auseinandersetzung angeregt. Die Intensität dieser Lernprozesse war allerdings individuell unterschiedlich und abhängig von der jeweiligen Arbeitsbereitschaft der Lernenden.

Literatur

Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) (2016). *Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft. Strategie des Bundesministeriums für Bildung und Forschung.* Frankfurt am Main: Zarbock.

DiWerS (2017a). *Digitale Werkzeuge in der Schule*. URL: https://projektwiki.zum.-de/wiki/Digitale_Werkzeuge_in_der_Schule (abgerufen im Nov. 2018).

DiWerS (2017b). *Ableitungen üben und vertiefen*. URL: https://projektwiki. zum.de/wiki/Digitale_Werkzeuge_in_der_Schule/Ableitungen_üben_und_vertiefen (abgerufen im Nov. 2018).

DiWerS (2017c). Graphisches Ableiten – Die Ableitung als Funktionsdetektor. In: DiWerS, *Ableitungen üben und vertiefen.* URL: https://projektwiki.zum.de/wiki/Digitale_Werkzeuge_in_der_Schule/Graphisches_Ableiten_-_Die_Ableitung_als_Funktionsdetektor (abgerufen im Nov. 2018).

Jedtke, E. (2018). Digitales Lernen mit Wiki-basierten Lernpfaden: Konzeption eines Lernpfads zu Quadratischen Funktionen, In: Pinkernell, G., Schacht, F. (Hrsg.), *Digitales Lernen im Mathematikunterricht*, 49-60. Hildesheim: Franzbecker.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2016). *Bildung in der digitalen Welt. Strategie der Kultusministerkonferenz.* URL: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2016/Bildung_digitale_Welt_Webversion.pdf (abgerufen im Nov. 2018).

Kultusministerkonferenz (KMK) (2017). *Kompetenzen in der digitalen Welt.* URL: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2017/KMK_Kompetenzen_-_Bildung_in_der_digitalen_Welt_Web.html (abgerufen im Nov. 2018).

Leuders, T. (2009). Intelligent üben und Mathematik erleben. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker & H.-G. Weigand (Eds.), *Mathemagische Momente*. Berlin: Cornelsen.

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) (2007). *Giving Knowledge for Free. The Emergence of Open Educational Resources*. URL: http://www.oecd.org/education/ceri/38654317.pdf (abgerufen im Nov. 2018).

Westfälische Wilhelms-Universität Münster (WWU Münster) (2013). *Prüfungsordnung für das Fach Mathematik im Rahmen der Prüfungen im Studium für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen mit dem Abschluss „Master of Education" an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster*. URL: https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/wwu /ab_uni/ab2014/ausgabe01/beitrag07.pdf (abgerufen im Nov. 2018).

„Besser als der Lehrer!“
Potenziale CAS-basierter Smartphone-Apps aus didaktischer und Lernenden-Perspektive

Marcel Klinger

Die seit Jahren anhaltende Debatte um den Einsatz von Computer-Algebra-Systemen (CAS) im Mathematikunterricht begann zu einer Zeit, als entsprechende Systeme vor allem Informatikräumen vorbehalten waren. Längst ist CAS in Form kostenlos verfügbarer Apps wie „Photomath“ lebensweltliche Realität vieler Schülerinnen und Schüler. Der Beitrag erforscht entsprechende CAS-basierte Smartphone-Apps und nimmt hierbei einerseits eine fachdidaktische Analyse einschlägiger Apps vor. Andererseits stehen auch Verwendungskontexte, Nutzungsweisen und Einstellungen von Lernenden im Mittelpunkt, welche anhand einer qualitativen Auswertung von 700 Nutzerrezensionen der marktführenden App „Photomath“ erarbeitet werden. Hiervon ausgehend lassen sich erste Hypothesen samt möglicher Konsequenzen und Forschungsdesideraten zum Phänomen CAS-basierter Smartphone-Apps formulieren.

Einleitung

Im Jahr 2017 besaßen 97 Prozent aller deutschen Jugendlichen zwischen zwölf und 19 Jahren ein Smartphone (Feierabend et al. 2017). Überwiegend werden solche Geräte in dieser Altersgruppe nicht mehr nur für ehemalige Kernfunktionalitäten wie Telefonieren und das Versenden von SMS verwendet, sondern für die Nutzung vielfältiger Dienste in App-Form. Hierzu gehören etwa soziale Plattformen wie Facebook, WhatsApp und Snapchat (ebd.), aber auch eine Vielzahl lernbezogener Apps (Larkin 2015). Zwar verfügen solche sog. *educational apps* (z.B. Hirsh-Pasek et al. 2015) nicht über einen vergleichbaren Markt, jedoch sind gerade Apps, die das Lernen von Mathematik fokussieren, häufig innerhalb einschlägiger Top-Listen zu finden. Solche können z. B. die Gestalt eines wissenschaftlichen Taschenrechners, eines Funktionenplotters oder eines symbolischen Gleichungslösers bzw. Kombinationen aus dem Vorgenannten aufweisen, um nur einige Funktionen entsprechender Apps zu nennen. Insgesamt steht ein mannigfaltiges Angebot zur Verfügung, das beständig erweitert wird. Insbesondere Apps, die das symbolische, automatisierte Lösen von Gleichungen ermöglichen, erfreuen sich hierbei jedoch besonderer

Beliebtheit. So verzeichnet die App „Photomath“, welche zusätzlich noch um eine Text- und Symbolerkennung per Handy-Kamera ergänzt ist, beispielsweise allein im deutschen Google Play Store über 900000 Bewertungen mit durchschnittlich 4,7 von 5 Sternen (s. Abbildung 1).

Abb. 1: Übersicht der Bewertungen der App Photomath im deutschsprachigen Google Play Store (Stand November 2018)

Photomath bildet hierbei nur einen Vertreter einer größeren Klasse von Apps: So steht eine Vielzahl von Programmen mit einem ähnlichen Funktionsumfang in den App-Stores der Duopolisten Apple und Google zur Verfügung, darunter „Math 42“, „Mathway“, und „Cymath“.

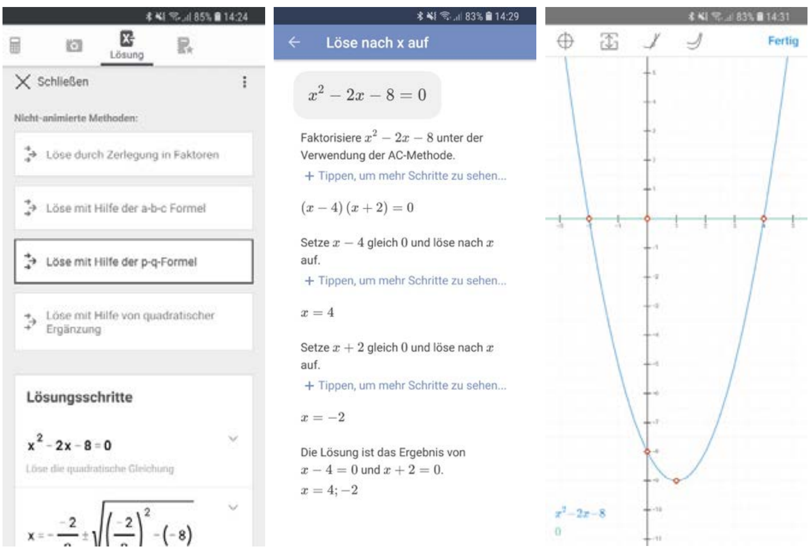


Abb. 2: Auswahl eines Lösungsansatzes in Photomath (links), Lösungsweg für eine quadratische Gleichung in Mathway (Mitte) sowie Darstellung einer quadratischen Gleichung in einem Koordinatensystem in Math 42 (rechts)

Neben einer Kamera-Erkennung bieten die genannten Apps häufig die Möglichkeit, die Verfahren, die für die Lösung eines Problems genutzt werden, selbst auszuwählen (Abb. 2 links), den Rechenweg schrittweise samt etwaiger Erklärungen auszugeben (Abb. 2 Mitte) sowie das entsprechende Problem in einer anderen, hier der graphischen Darstellungsform abzubilden (Abb. 2 rechts).

Bereits seit einigen Jahren wird auch insgesamt über den Einsatz von Computer-Algebra-Systemen (CAS) im Mathematikunterricht diskutiert. Die teilweise emotional geführte Debatte nimmt dabei oft händische Rechenfertigkeiten in den Blick, welche aus Sicht der CAS-Kritiker durch einen übermäßigen Einsatz Gefahr laufen, verloren zu gehen (z. B. Pallack 2018). In diesem Kontext ist vor allem die in Form unterschiedlicher Brandbriefe geführte öffentliche Diskussion einiger Hochschullehrerinnen und -lehrer zu nennen (Warnecke et al. 2017; Vieth-Entus 2017). Hierbei fällt der Fokus der Debatte häufig auf die Frage, ob CAS unterrichtlich überhaupt eingesetzt werden sollte oder nicht. Vielmehr scheint CAS jedoch auch ohne institutionelles Zutun in Form kostenlos verfügbarer Apps wie Photomath lebensweltliche Realität vieler Schülerinnen und Schüler zu sein. Gerade im Bereich von Hausaufgaben oder dem selbstständigen Lernen erfreuen sich die genannten Anwendungen besonderer Beliebtheit, wie die Rezensionen in Abbildung 3 exemplarisch verdeutlichen. Für manchen sind entsprechende Apps schlicht „besser als der Lehrer“.

Abb. 3: Exemplarische Rezension der App Photomath im deutschsprachigen Google Play Store

Rezensionen wie diese lassen vermuten, dass die genannten Apps bereits einem größeren Schülerkreis bekannt und in entsprechender Verwendung sind. Das Phänomen leicht verfügbarer CAS-fähiger Smartphone-Apps soll daher im Weiteren untersucht werden. Gemeint sind dabei vor allem Apps mit einem „kleinen" CAS, bei denen das System vor allem hintergründig arbeitet und beispielsweise keine direkten Befehle in Werkzeugsprache (z. B. „solve(.)") an das CAS adressiert werden können, wie es etwa bei Werkzeugen wie TI-Nspire oder gar Maple der Fall wäre.

Ziel der Studie

In der vorliegenden Studie soll das Phänomen CAS-basierter Smartphone-Apps zunächst erkundet werden. Hierbei werden in einem ersten Schritt einschlägige Apps aus einer *wissenschaftlich-didaktischen Perspektive* betrachtet und miteinander verglichen. Ziel ist es, ein erstes Fazit zum generellen didaktischen Potenzial der Apps zu ziehen. Demgegenüber wird die Perspektive der Nutzerinnen und Nutzer, also die *Lernenden-Perspektive*, in den Fokus gerückt. Hierzu werden exemplarisch Nutzerrezensionen der marktführenden App Photomath herangezogen und systematisch analysiert. Ziel ist es, die innerhalb dieser Rezensionen gebundenen Informationen hinsichtlich der Verwendungskontexte, Nutzungsweisen, Einstellungen, etc. der Apps von Lernenden herauszuarbeiten und durch Kategoriebildung zu klassifizieren und ggfs. quantifizieren. Schließlich werden beide Perspektiven in einem Gesamtfazit zusammengeführt und übergreifende Erkenntnisse zum Phänomen CAS-basierter Smartphone-Apps festgehalten.

Didaktische Perspektive

Ähnlich wie bereits im Beitrag von Barzel, Ball & Klinger (in Druck) soll an dieser Stelle die Perspektive der Mathematikdidaktik eingenommen werden. Aus dieser heraus stellt sich die Frage, welche Rolle Apps der beschriebenen Art im Mathematikunterricht einnehmen können und welches didaktische Potenzial mit ihnen verbunden ist.

Zu diesem Zweck wurden die bereits oben genannten Apps Math 42, Photomath, Mathway und Cymath einem genaueren Review unterzogen. Die jeweiligen Apps stehen sowohl im Google Play Store als auch im Apple

App Store bereit und weisen im Kern eine vergleichbare Funktionalität auf: Sie sind jeweils mit einem Computer-Algebra-System ausgestattet und lösen Gleichungen, welche via Tastatur oder Kamera eingegeben werden.

Insgesamt stehen Klassifikationsschemata, wie sie zu gezielten didaktischen Analysen allgemeiner mathematischer Apps nötig wären, nur unzureichend in standardisierter Form zur Verfügung. Dies wird bereits an der begrifflichen Unschärfe deutlich, die der App-Begriff mit sich bringt. Eine entsprechende Arbeitsgruppe, welche im Rahmen der in diesem Tagungsband protokollierten Tagung zusammenkam, sah allein in einer trennscharfen Definition des Bezeichners „App“ größere Schwierigkeiten. So findet die Bezeichnung inzwischen etwa auch auf nicht-mobilen Systemen Anwendung (etwa für Programme in MacOS). Im Folgenden soll daher zumindest analog zu Barzel et al. (in Druck) hinsichtlich der Oberflächen- sowie Tiefenstruktur der vier Repräsentanten-Apps unterschieden und auf eine engere begriffliche Eingrenzung verzichtet werden.

Oberflächenstruktur

In diese Kategorie fallen vor allem Aspekte der Apps, die nicht unmittelbar mit einem potenziellen Lernerfolg zusammenhängen und sich eher auf oberflächliche Beobachtungen beziehen: Hierbei fällt auf, dass lediglich Math 42 keine Kameraerkennung anbietet. Alle anderen Apps verfügen über eine automatische Erkennung mathematischer Notationen. Lediglich Photomath ist in der Lage, auch ohne aktive Internetverbindung Probleme zu bewältigen, während alle anderen Apps ausschließlich auf den zugehörigen Heimatservern der Anbieter über eine CAS-Komponente verfügen. Dies ist vor allem vor dem Kontext eines potentiellen unterrichtlichen Einsatzes, bei dem nicht unbedingt eine aktive Internetverbindung vorausgesetzt werden kann, von Relevanz. Während alle Apps außer Cymath im Wesentlichen werbefrei zu sein scheinen, bietet lediglich diese App eine kostenpflichtige Premium-Variante an, durch deren Kauf man sich lästiger Werbebanner entledigen kann. Die meisten Apps können unmittelbar nach Herunterladen verwendet werden. Lediglich bei Math 42 ist zunächst eine kostenlose Registrierung erforderlich. Das Geschäftsmodell einschlägiger Anbieter ist nicht unmittelbar transparent. So wird nicht klar, welche Daten möglicherweise zusätzlich durch die Apps erhoben werden und in welcher Form sie ggfs. weiterverarbeitet werden.

Tiefenstruktur

Um die genannten Apps einer eingehenderen und vor allem tiefergehenden Analyse zu unterziehen, sind naturgemäß mathematische Probleme notwendig, deren Lösungen es zu bestimmen gilt. Hierbei ist, was als Lösung gilt, vom jeweils betrachteten Problem abhängig. Bei den drei verwendeten Testfällen handelt es sich um die folgenden mathematischen Probleme P1, P2 und P3:

P1: Bestimme die Lösung(en) der folgenden quadratischen Gleichung $x^2-2x-8=0$.

Zugehörige Lösung: $x_1=-2, x_2=4$

Schulstufe: 9. Jahrgang

P2: Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x)=3x^4+2x^2+3$.

Zugehörige Lösung: $f'(x)=12x^3+4x$

Schulstufe: 10. oder 11. Jahrgang

P3: Vereinfache $y=\frac{6x}{2x^2}$ so weit wie möglich.

Zugehörige Lösung: $y=3/x$

Schulstufe: 8. Jahrgang

Eine Problembearbeitung durch die Apps erfolgt dabei immer in derselben Schrittigkeit: Zunächst müssen die Probleme durch die App erfolgreich erkannt werden (1). Beim anschließenden Lösen (2) finden u. U. geeignete Erläuterungen (3) statt. Schließlich ist es denkbar, dass die App Wissen über die fokussierten mathematischen Inhalte z. B. durch Verwendung anderer Darstellungsformen, etc. vernetzt oder anderweitig an vorhandenes Wissen anbindet (4). Die Ergebnisse einer entsprechenden Betrachtung aus didaktischer Perspektive können im Folgenden nur auszugsweise wiedergegeben werden:

Zu P1: Die untersuchten Apps sind jeweils in der Lage, das gegebene Problem korrekt zu erkennen und zu lösen. Hierbei bieten alle Apps jeweils unterschiedliche Methoden zur Lösung an (z. B. *pq*-Formel, quadratische Ergänzung, etc.). Die Erläuterung einzelner Rechenschritte erfolgt meist fachsprachlich („Faktorisiere den Ausdruck“ oder „Wenn das Produkt von Faktoren gleich 0 ist, dann ist mindestens einer dieser Faktoren gleich 0“, jeweils Photomath). An einzelnen Stellen lassen sich jedoch auch weniger fachsprachliche Formulierungen finden („Unterteile die ursprüngliche PlusMinus Gleichung in zwei Teile, einmal mit Plus und einmal mit Minus“, Photomath). Math 42 und Photomath bieten ohne weitere Erläuterungen den Funktionsgraph der Funktion des äquivalenten Nullstellenproblems an, womit ein vernetzender Blick hier zumindest in Ansätzen erkennbar ist.

Zu P2: Auch dieses Problem können alle betrachteten Apps lösen. Hierzu ist bei allen Apps jedoch die vorherige Notationsänderung unter Verwendung eines Ableitungsoperators notwendig. Hierbei unterstützen manche Apps lediglich die Lagrange-Notation $(.)'$, andere lediglich die Notation nach Leibniz $d/dx(.)$, was vor einem etwaigen unterrichtlichen Einsatz eine entsprechende Thematisierung notwendig macht. Math 42 bietet zudem Links zu verwandten Themen wie „Kurvendiskussion“ an.

Zu P3: Mit dem betrachteten Problem wissen nicht alle Apps geeignet umzugehen. Beispielsweise Mathway ist weder in der Lage es zu erkennen, noch entsprechend zu lösen. Lediglich Math 42 erkennt und löst das Problem geeignet und gibt strukturierte Schritte zur Vereinfachung an. Auch hierbei werden entsprechende Rechenregeln eher fachsprachlich erläutert.

Fazit zur didaktischen Perspektive

Es können einige Beobachtungen problemübergreifend festgestellt und zusammengefasst werden: So lassen sich für die meisten Probleme und Apps die jeweiligen Lösungsschritte (sofern die jeweilige App imstande ist, das Problem zu lösen) einzeln anzeigen und jeweils auffalten, so dass einzelne Umformungen oder Operationen in jeweils elementarer Form dargestellt werden. Verbindungen zu vorhandenem Wissen werden eher selten geschlagen; auch alternative Darstellungsformen oder Erklärungen finden sich selten. Die verwendete Sprache ist auch hier überwiegend fachlich geprägt. Die Symbolik ist auf eine spezifische Notation festgelegt, auch dann, wenn in der Mathematik, wie etwa beim Ableitungsbegriff, unterschiedliche Schreibweisen verbreitet sind. Naturgemäß sind die Apps vor allem geeignet, klassische Rechenaufgaben zu lösen, also vor allem die Ausführung eines Kalküls zu bedienen. Entsprechend zielen die Apps eher auf das Training prozeduralen Wissens (Barzel et al. 2013). Dies verhält sich konsistent zu Befunden innerhalb der Literatur (z.B. Larkin 2015). Ein gezielter Vorstellungsaufbau oder die Thematisierung von Fehlerwissen lassen sich nicht erkennen.

Lernenden-Perspektive

Nachdem einschlägige Apps im vorherigen Abschnitt einer Analyse aus didaktischer Perspektive unterzogen wurden, richtet sich der Fokus nun auf die Perspektive der Nutzerinnen und Nutzer der Apps.

Rezensionen im Netz als Forschungsdaten

Diese wird häufig in Form von Rezensionen, die sich unmittelbar auf die App als Produkt beziehen, durch Nutzerinnen und Nutzer festgehalten. In ihnen kommen, wie eingangs bereits illustriert, individuelle Bewertungen und Ansichten der Nutzerschaft zum Ausdruck. Entsprechende Rezensionen als Datengrundlage wissenschaftlicher Analysen mit unterschiedlichem Ziel zu nutzen, ist dabei keine neue Idee. Gerade im Umfeld der Big-Data-Methoden genießen solche oft frei verfügbaren Datensätze im Internet besondere Aufmerksamkeit. Einschlägige Studien setzen dabei vor allem auf quantitative Analysemethoden, die beispielsweise die Häufigkeit besonderer Wörter oder Wortkombinationen fokussieren. So analysieren Khalid et al. (2015) für 20 unterschiedliche Apps typische Nutzerbeschwerden und erforschen die Auswirkungen negativer Eindrücke der Nutzerinnen und Nutzer auf die numerische Bewertung der App. Insgesamt betrachteten die Autoren über 250000 überwiegend negative Rezensionen, deren zugehörige Bewertung jeweils einem oder zwei von fünf möglichen Sternen entspricht. Die Konzeption einer vergleichbaren Algorithmik zur Analyse der Rezensionen der hier betrachteten Apps stellt sowohl vor ökonomischen wie technischen Gesichtspunkten jedoch eine gegenwärtig nicht leist- bzw. vertretbare Herausforderung dar.

Verwendete Methodik und Datensatz

Aus diesem Grund wurde eine deutlich kleinere Stichprobe herangezogen. Konkret handelt es sich um jene 700 Rezensionen (einschließlich entsprechender Sterne-Bewertungen) für die App Photomath im deutschsprachigen Google Play Store, welche im Zeitraum zwischen Juni und August 2018 abgegeben wurden. Diese Einschränkung auf die App Photomath erscheint legitim, da diese die einzige der betrachteten Apps ist, welche innerhalb der allgemeinen Top-500-Liste kostenloser Apps des genannten App-Stores vertreten ist; in der Kategorie „Lernen“ sogar auf Platz 4 (Stand 2. Dezember 2018). Android-Geräte nehmen laut Zahlen des Marktforschungsunternehmens Kantar Worldpanel zudem knapp 82, Apple-Geräte hingegen lediglich etwa 16 Prozent des weltweiten Smartphone-Marktes ein (Stand August 2017).

Insgesamt zeigt die so gezogene Stichprobe anhand der ihnen zugeordneten numerischen Bewertungen mit durchschnittlich 4,6 von 5 Sternen einen ähnlichen Deckeneffekt, wie er bereits in Abbildung 1 deutlich wurde. Statt auf quantitative Verfahren setzt die vorliegende Studie auf einen qualitativen methodischen Fokus, wie er sich innerhalb der Mathematikdidaktik häufig bewährt hat. Konkret wurden angelehnt an die Grounded Theory (Glaser & Strauss 2010) die genannten Rezensionen händisch analysiert und mit parallel generierten Codes teilkodiert. Hierbei ist also durchaus möglich, dass eine Rezension mehreren Codes zugeordnet wird. Prinzipien der Grounded Theory erschienen hier einerseits aufgrund des explorativen Charakters des Vorhabens zielführend. Andererseits steht bei ihr im Vergleich zu anderen Methoden keine zu prüfende Theorie oder eine präzise und stark eingegrenzte Forschungsfrage, sondern ein eher offenes und sich entwickelndes Forschungsinteresse im Mittelpunkt (vgl. Aeppli et al. 2016, S. 249). Dies wirkte vor dem Hintergrund, dass a priori nicht bekannt war, welche Informationen sich den zu erschließenden Daten entnehmen lassen, profitabel.

Gebildetes Kategoriensystem

Für das so gebildete Kategoriensystem haben sich im Laufe der Analyse insgesamt fünf Oberkategorien herauskristallisiert, die vor allem entlang der

Frage motiviert sind, wozu oder worüber die unter ihnen subsumierten Codes Auskunft geben können. Sie geben Aufschluss über Verwendungskontexte, Nutzungsweisen und Einstellungen hinsichtlich der App Photomath aus Perspektive der Nutzerinnen und Nutzer. Entlang der fünf Oberkategorien soll die Systematik und damit das untersuchte Phänomen CAS-basierter Smartphone-Apps im Folgenden auszugsweise illustriert werden.

Persönlicher Hintergrund: Einige Rezensionen lassen durch die Aussagen ihrer Urheberinnen und Urheber unmittelbar auf die Zugehörigkeit zu einer Personengruppe schließen. Hierbei konnte in 76 Fällen eine Zuordnung zur Gruppe „Schülerinnen und Schüler“, in sechs Fällen zur Gruppe „Eltern“, in vier Fällen zur Gruppe „Studierende“ und in zwei Fällen zur Gruppe „Lehrkräfte“ hergestellt werden. In wenigen Fällen kann auch darüber hinaus auf affektiv-motivationale Merkmale geschlossen werden. So zeigt sich in zumindest einem Fall eine deutliche Matheaversion. In sieben Fällen wird die Aussage getätigt, schlecht in Mathematik zu sein.

Mängel an der App: Die zweite Oberkategorie subsumiert negativ konnotierte Kritik an der rezensierten App. So werden in 17 Fällen Verbesserungsvorschläge gemacht, darunter in elf Fällen, dass die App nach Möglichkeit auch Textaufgaben bearbeiten können sollte. In 13 Fällen lässt sich zudem darauf schließen, dass die App nicht imstande war, gewisse Aufgaben zu bearbeiten. 18 weitere Kritikfälle sind unmittelbar technischer Natur. Darunter finden sich am häufigsten Probleme bzgl. der Kamerafunktionalität und der zugehörigen Zeichenerkennung.

Funktionalitäten und Qualitäten der App: Innerhalb der dritten Oberkategorie finden sich vor allem Hervorhebungen, die entsprechend positiver Natur sind. Diese beziehen sich wiederum auf die mithilfe der App bearbeiteten mathematischen Probleme oder eher auf äußere Merkmale, wie den Bedienkomfort (20 Fälle) und die Qualität der Texterkennung (45 Fälle). Bezogen auf die Mathematik heben Nutzerinnen und Nutzer vor allem hervor, dass die App in der Lage ist, einen korrekten Rechenweg aufzuzeigen (83 Fälle), stets korrekte Ergebnisse liefert (acht Fälle), auch Gleichungen löst, die Unbekannte bzw. Variablen beinhalten (elf Fälle), einen Funktionsgraphen anzeigt (13 Fälle), umfangreiche Aufgabenarten zu bearbeiten imstande ist (29 Fälle) sowie vielfältige Lösungswege anzeigt (vier Fälle).

Anwendungsbereiche: Diese Kategorie enthält Fälle, die Rückschlüsse auf Einsatzkontexte der App zulassen. In insgesamt 43 Fällen, nutzen Anwenderinnen und Anwender die App dabei zur Bearbeitung der Hausaufgaben, in 13 Fällen zum Schummeln in Unterricht oder Prüfungssituationen und in sechs Fällen zur Vorbereitung auf Prüfungen.

Motivation sowie positive Gefühle und Erlebnisse: Während der Analyse hat sich gezeigt, dass sich die Motivation zum und positive Erfahrungen beim Einsatz der App wenig oder gar nicht trennen lassen, so dass diese Kategorie entsprechend eine gemeinsame fünfte Oberkategorie bildet. Hierbei zeigt sich besonders häufig, dass Nutzerinnen und Nutzer die App aus einer verstehensorientierten Motivlage einsetzen. So äußern Rezensenten, dass sie mithilfe der App etwas lernen oder gelernt haben (30 Fälle), sich Ergebniskontrollen im Nachgang einer Rechnung durchführen lassen (elf Fälle), sie durch die App etwas verstehen oder verstanden haben (45 Fälle), Erklärungen der App hilfreich sind oder waren (54 Fälle) oder sie die App zur Unterstützung bei Blockaden oder schwierigen Aufgaben verwenden oder verwendet haben (22 Fälle). Dahingegen finden sich aber auch Motive wie Faulheit (fünf Fälle) oder das Einsparen von Zeit (drei Fälle). In acht Fällen sprechen Nutzerinnen und Nutzer das Prädikat „besser als der Taschenrechner“, in zwölf Fällen „besser als der Lehrer / die Lehrerin“ sowie in 16 Fällen „Lebensretter“ aus. In 13 Fällen wird zudem konkret eine Notenverbesserung durch die App genannt. Weiterhin subsumiert die Oberkategorie Lob und Dank an die Entwickler (22 Fälle), eine allgemeine Weiterempfehlung (40 Fälle), das generelle Empfinden einer Nützlichkeit der App (14 Fälle) sowie das Empfinden der App als allgemeine Unterstützung oder Hilfe (118 Fälle). Als letzter Punkt lassen sich in 502 Fällen allgemeine positiv-konnotierte Aussprüche („Super!“, „Cool!“) innerhalb meist sehr kurz gefasster Rezensionen feststellen. Diese zeigen zwar eine insgesamt sehr positive Wahrnehmung der Nutzerschaft der App, bieten jedoch nicht das Potenzial weiterer Theoriebildung.

Fazit zur Lernenden-Perspektive und methodische Diskussion

Die verwendete Methode basiert auf Online-Rezensionen einschlägiger Apps als Datenquelle und versucht mittels Elementen der Grounded Theory Hypothesen zu Verwendungskontexten, Nutzungsweisen, Einstellungen, etc. hinsichtlich entsprechender Apps zu fundieren. In gewisser Weise handelt es sich hierbei um „neue Quellen qualitativer Daten“ wie Glaser und Strauss (2010) sie bereits propagieren (S. 175 ff.). Der Kategoriebildungsprozess basiert dabei vor allem auf einer Phase des offenen Kodierens im iterativen Wechsel mit Anpassungen und Verfeinerungen der gewonnenen Kategorien (axiales Kodieren). Dennoch gestaltet sich etwa das theoretische Sampling schwierig, da nicht gezielt mit Blick auf eine theoretische Sättigung weitere Fälle herangezogen werden können, sondern lediglich die Fallzahl der betrachteten Rezensionen erhöht werden kann (vgl. Aeppli et al. 2016, S. 247ff.). Da sich über einschlägige Rezensionen etwa kaum personenbezogene Daten erheben lassen, findet somit im Grunde lediglich ein statistisches Sampling statt (Glaser & Strauss 2010, S. 78 ff.). Im Laufe der Analyse zeigte sich der Kategoriebildungsprozess im Wesentlichen als konvergent, so dass die betrachteten 700 Rezensionen zu einer theoretischen Sättigung führten. Insgesamt lassen sich also Hypothesen zu den Nutzerinnen und Nutzern entsprechender Apps, dem Kontext ihrer Verwendung und besonders positiver und negativer Aspekte der Apps bilden. Dies wurde hier exemplarisch für die offenkundig marktführende App Photomath gezeigt.

Die so gewonnenen Kategorien bilden einen ersten Anhaltspunkt für weitere Forschungen, etwa zur Entwicklung eines geeigneten Fragebogens zur Operationalisierung der Nutzerperspektive entsprechender Apps. Es liegt in der Natur der Methode, dass hingegen keine repräsentativen Aussagen getroffen werden können; stattdessen hat die Studie explorativen Pilot-Charakter. Hinzu kommen weitere Phänomene, die die verwendeten Daten negativ verzerrt haben könnten. Hierzu zählen potenziell gegen Entgelt erstellte Rezensionen oder Schüchternheits-Effekte, etwa wenn ein Lernender aufgrund der häufigen Klarnamendarstellung über einer Rezension nicht erwähnt, dass eine App auch zum Schummeln in Prüfungssituationen dienlich sein kann.

Gesamtfazit

Fazit zum Potenzial der Apps

Die Apps Math 42, Photomath, Mathway und Cymath wurden zunächst einer didaktischen Analyse unterzogen. Ähnlich zum Review von Barzel et al. (in Druck) zeigen sich die betrachteten Apps als elaborierte Tools, die zum rechnerischen Lösen verschiedener mathematischer Probleme imstande sind. In Ansätzen ermöglichen die Apps vielfältige mathematische Lösungswege und setzen auch auf unterschiedliche Darstellungsformen. Rechenschritte werden oft feingliedrig erläutert. Es zeigt sich aber auch, dass entsprechende Erläuterungen oft von Fachsprache geprägt sind, die für manche Lernende eine schwierige Hürde darstellen kann. Ferner ist teilweise die Kenntnis besonderer Notationen notwendig, um etwa eine Ableitungsfunktion zu bestimmen. Ihr didaktisches Potenzial schöpfen die betrachteten Apps noch nicht aus: So wäre es zumindest denkbar, dass an geeigneten Stellen auf häufige Fehler zum Zweck des Aufbaus von Fehlerwissen hingewiesen oder gezielt die Aufarbeitung etwaiger Wissensmissstände angeboten würde. Im Mittelpunkt der Apps stehen vor allem Prozeduren und Algorithmen; weniger Konzepte und Verbindungen (Barzel et al. 2013).

Die App Photomath wurde zudem in Form der Analyse von Nutzerrezensionen auch aus Lernenden-Perspektive betrachtet. Es kann vermutet werden, dass vor allem Schülerinnen und Schüler zur Anwendergruppe der betrachteten Apps gehören. Es lassen sich kaum Anzeichen einer gezielten schulischen Verwendung finden. Stattdessen scheinen die Apps eher in informelleren Lernkontexten wie der häuslichen Vorbereitung von Prüfungen oder der Erledigung von Hausaufgaben eine Rolle zu spielen. Die Apps scheinen weniger zum Schummeln, sondern vor allem (aus Sicht der Lernenden) zum Aufbau von Verständnis genutzt zu werden. Lernende schätzen u.a. die Darstellung des Rechenweges und klaren Erläuterungen der Apps. An dieser Stelle drängt sich die Vermutung einer von der wissenschaftlichen Perspektive abweichender Auslegung des Verstehensbegriffs auf der Seite der Lernenden auf. Kulgemeyer (2018) spricht in diesem Zusammenhang auch treffend von einer möglichen „Verstehensillusion“. Lernende fassen hierbei lediglich oberflächlich vermitteltes Routine-Wissen als Verständnis auf, welches jedoch spätestens bei der Bearbeitung von eher konzeptuell gestalteten Aufgaben an seine Grenzen stößt.

Konsequenzen für Forschung und Unterrichtspraxis

Es stellt sich die Frage, wie auf die Existenz entsprechender Apps und die Prominenz, die sie offenbar in Teilen der Schülerschaft genießen, reagiert werden sollte (Webel & Otten 2016; Klinger & Schüler-Meyer, in Druck). Ein Verbot von Smartphones im Unterricht erweist sich schnell als zu kurz gedachter Lösungsansatz; entziehen sich Lernende doch im Rahmen von Hausaufgaben, in denen klassischerweise ein Großteil des Einübens mathematischer Verfahren und Konzepte geschieht, einer entsprechenden Kontrolle. Hinzu kommen Phasen des außerschulischen Lernens, wie sie etwa im Rahmen der Vorbereitung auf Prüfungssituationen vorkommen. So ist bekannt, dass Schülerinnen und Schüler heute vielfach Smartphone-Apps im Rahmen des außerschulischen Lernens einsetzen (Feierabend et al. 2017; Anshari et al. 2017; Rahmati & Zhong 2013). Entsprechend sehen Trouche & Drijvers bereits 2010 außerschulische Lernsituationen durch das Vorhandensein verschiedener Handheld-Technologien, wie sie sich etwa in Smartphones manifestieren, als besondere Herausforderung zukünftiger mathematikdidaktischer Forschung.

Gerade vor diesem Hintergrund ist es notwendig, dass Lehrkräfte sich nicht nur der Situation bewusst sind, dass Lernende zumindest in informellen Lernsettings entsprechende Apps einsetzen. Sie erfordert vor allem auch, Aufgaben produktiv zu gestalten, d. h. z. B. solche Übungsaufgaben zu stellen, die vor allem auf Verständnis und weniger auf das Auswendiglernen zur Lösung geeigneter Algorithmen zielen (s. auch Winter 1984; Leuders 2009). Im Kontext quadratischer Gleichungen könnte dies etwa bedeuten, dass neben dem Lösen entsprechender Gleichungen auch zum Aufstellen solcher aufgefordert wird („Bestimmen Sie eine quadratische Gleichung so, dass 0 und 1 Lösungen sind. Gibt es mehrere Möglichkeiten?“) oder dass gezielt Reflexionsanlässe z. B. hinsichtlich der Methodenwahl und dem individuellen Vorgehen bei der Berechnung der Lösung geschaffen werden („Verwenden Sie verschiedene Verfahren zur Lösung der Gleichung.

Welches ist wann zu bevorzugen und warum?“ oder „Würden Sie genau so vorgehen oder gibt es einen Weg der effizienter zum Ziel führt?“).

Ausblick und Forschungsdesiderate

Vor dem Hintergrund des Vorhandenseins der hier untersuchten Apps bedarf es – wie eingangs kurz skizziert – einer Neuausrichtung der Diskussion um den unterrichtlichen Einsatz oder um ein entsprechendes Verbot von CAS (Klinger & Schüler-Meyer, in Druck). Durch ihren hohen Grad an Verfügbarkeit in Form von Smartphone-Apps sind solche Systeme de facto eingeführt. Es erscheint daher lohnenswert Apps wie Photomath unterrichtlich explizit zu thematisieren, diese kritisch zu diskutieren und ihren Einsatz zu reflektieren. Obwohl Anwenderinnen und Anwender vielfach rückmelden, durch einschlägige Apps besser zu „verstehen“, besteht die Gefahr, dass entsprechende Apps ohne geeignete Aufgabenkultur vor allem das Lernen mathematischer Rezepte begünstigen (ebd.). Nicht zuletzt besteht auch die Möglichkeit einer unterschiedlichen Auslegung des Verstehensbegriffs auf der Seite der Lernenden. Die Untersuchung dieses Konflikts zwischen der didaktischen und der Lernenden-Perspektive erscheint daher lohnenswert. Aber auch die Entwicklung und Erforschung adäquater Lernumgebungen, die Photomath oder vergleichbare Apps explizit in unterrichtliche Sequenzen einbinden und dabei auch konzeptuelles Verständnis fördern, wäre im Sinne der Bereitstellung möglicher Best-Practice-Beispiele hilfreich. Einen Ansatz bietet hier etwa der geeignete Übertrag der Ideen produktiven bzw. intelligenten Übens (etwa Winter 1984; Leuders 2009) auf eine CAS-basierte Lernumgebung für Smartphones (s. auch Klinger & Schüler-Meyer, in Druck). Letztlich sind aber gerade vor dem Hintergrund der methodischen Unzulänglichkeiten dieser Studie weitere qualitative wie quantitative Erhebungen rund um das Phänomen CAS-basierter Smartphone-Apps wünschenswert.

Literatur

Aeppli, J, Gasser, L., Gutzwiller, E. & Tettenborn, A. (2016). *Empirisches wissenschaftliches Arbeiten: Ein Studienbuch für die Bildungswissenschaften*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Anshari, M., Almunawar, M. N., Shahrill, M., Wicaksono, D. K. & Huda, M. (2017). Smartphone usage in the classrooms: Learning aid or interference? *Education and Information Technologies*, *22*(6), 3063–3079.

Barzel, B., Ball, L. & Klinger, M. (in Druck). Students‘ self-awareness of their mathematical thinking: Can self-assessment be supported through CAS integrated learning apps on smartphones? In G. Aldon & J. Trgalova (Hrsg.), *Selected papers of the International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT13)*. Springer.

Barzel, B., Leuders, T., Prediger, S. & Hußmann, S. (2013). Designing tasks for engaging students in active knowledge organization. In C. Margolinas (Hrsg.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22* (S. 285–294). Oxford.

Feierabend, S., Plankenhorn, T., & Rathgeb, T. (2017). JIM-Studie 2017: *Jugend, Information, (Multi-) Media – Basisuntersuchung zum Medienumgang 12- bis 19-Jähriger*. Stuttgart: Medienpädagogischer Forschungsverbund Südwest.

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (2010). *Grounded Theory: Strategien qualitativer Forschung* (3. Aufl.). Bern: Huber.

Hirsh-Pasek, K., Zosh, J. M., Golinkoff, R. M., Gray, J. H., Robb, M. B. & Kaufman, J. (2015). Putting education in “educational” apps: Lessons from the science of learning. *Psychological Science in the Public Interest*, *16*(1), 3–34.

Khalid, H., Shihab, E., Nagappan, M. & Hassan, A. E. (2015). What do mobile app users complain about? *IEEE Software*, *32*(3), 70–77.

Klinger, M. & Schüler-Meyer, A. (in Druck). CAS oder kein CAS, ist das noch die Frage? Smartphone-basierte Computer-Algebra-Apps brauchen eine geeignete Aufgabenkultur. *Mathematik Lehren*, Heft 215.

Kulgemeyer, C. (2018). Wie gut erklären Erklärvideos? *Computer + Unterricht*, Heft 109, 8–11.

Larkin, K. (2015). “An app! An App! My kingdom for an app”: An 18-month quest to determin whether apps support mathematical knowledge building. In T. Lowrie & R. Jorgensen (Hrsg.), *Digital games and mathematics learning: Potential, promises and pitfalls* (S. 251–276). Dordrecht: Springer.

Leuders, T. (2009). Intelligent üben und Mathematik erleben. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathemagische Momente* (S. 130–143). Berlin: Cornelsen.

Pallack, A. (2018). *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Sekundarstufen I + II*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Rahmati, A. & Zhong, L. (2013). Studying smartphone usage: Lessons from a four-month field study. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, *12*(7), 1417–1427.

Trouche, L. & Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education: Flashback into the future. *ZDM Mathematics Education*, *42*(7), 667–681.

Vieth-Entus, S. (2017, 30. März). 50 Professoren verurteilen Mathe-Brandbrief als „schädlich“. *Tagesspiegel*. Abgerufen von https://www.tagesspiegel.de/berlin/streit-um-bildungsstandards-50-professoren-verurteilen-mathe-brandbrief-als-schaedlich/19590112.html (letzter Zugriff: 31. Januar 2019)

Warnecke, A. B., Burchard, A. & Kühne, A. (2017, 22. März). Der Aufstand der Mathelehrer: Brandbrief gegen Bildungsstandards. *Tagesspiegel*. Abgerufen von https://www.tagesspiegel.de/wissen/brandbrief-gegen-bildungsstandards-der-aufstand-der-mathelehrer/19550928.html (letzter Zugriff: 31. Januar 2019)

Webel, C. & Otten, S. (2016). Teaching in a world with Photomath. *Mathematics Teacher*, *109*(5), 368–373.

Winter (1984). Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. *Mathematik Lehren*, Heft 2, 4–16.

Programmieren im Mathematikunterricht

Bernhard Matter

Algorithmen spielten in der Mathematik bereits Jahrtausende vor den ersten Computern eine zentrale Rolle. Algorithmen (re-)konstruieren, verstehen und optimieren sind wesentliche Aspekte eines nachhaltigen Mathematikunterrichts. Das Übersetzen von Algorithmen in lauffähige Computerprogramme kann mathematische Erkenntnisse anregen und das Verständnis für mathematische Zusammenhänge fördern. Schlüsselkompetenzen wie Abstrahieren oder Verallgemeinern werden auf spielerische Art gefördert, beim Problemlösen erweitert sich das Spektrum ausführbarer Strategien. Bereits seit 10 Jahren versucht die Pädagogische Hochschule Graubünden das Potenzial, welches Programmieren für das Mathematiklernen birgt, zu nutzen.

Einleitung

An der Pädagogischen Hochschule Graubünden (PHGR) begannen die Programmieraktivitäten mit der Steuerung von Robotern. Seit 2008 organisiert die PHGR jährlich einen Regionalwettbewerb der First Lego League. 2010 startete das von der ETH Zürich und der PHGR gemeinsam getragene Projekt *Programmieren in Primarschulen.* Die Schülerinnen und Schüler arbeiten hierbei mit der textbasierten Programmiersprache LOGO. Neben dem Unterricht in den Schulen durch Dozierende der beiden Hochschulen erweiterten sich die Aktivitäten schon bald um die Aus- und Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrern, sowie die Entwicklung von Lernangeboten.

Das Potenzial des Programmierens für den Erkenntnisgewinn im Mathematikunterricht führte zur Ausarbeitung und Erprobung interdisziplinärer Lernangebote. Mit der Einführung eines neuen Lehrplans in 21 Deutschschweizer Kantonen (*Lehrplan 21*; vgl. Erziehungs-, Kultur- und Umweltschutzdepartement Graubünden 2016) wurde die Förderung von Informatik-Kompetenzen ab dem Kindergarten zur Pflicht. Die PHGR begann in diesem Zusammenhang mit der Entwicklung eines Spiralcurriculums zur gleichzeitigen Förderung mathematischer und informatischer Kompetenzen. Weitere Projekte im Sinne fachdidaktischer

Entwicklungsforschung erweitern den Fokus auf die interdisziplinäre Förderung des algorithmischen Denkens.

Informatik und insbesondere Programmieren sind inzwischen auch in der Lehrpersonenausbildung zur Pflicht geworden. Studierende erwerben in Modulen an der PHGR Grundwissen und sammeln Unterrichtserfahrungen in Praktika oder in Ferienaktivitäten für Kinder (MINT-Camps, i-Camps u. a.). Die verwendeten Werkzeuge aus der Informatik wurden vielfältiger. Dozierende, Studierende, Lehrpersonen und Kinder arbeiten mit unterschiedlichen Programmiersprachen und programmieren verschiedene Roboter oder Platinen (z. B. Calliope).

Modullehrplan *Medien und Informatik*

Im Lehrplan 21 ergänzen Module die Fachbereichslehrpläne: In Modulen können Aufgaben der Schule bearbeitet werden, die nicht oder nur teilweise den Fachbereichen zugewiesen werden können. Module unterscheiden sich von Fachbereichen dadurch, dass sie nur über ein begrenztes, nicht durchgehendes Zeitbudget verfügen. Im Kanton Graubünden wurde der Bereich *Medien und Informatik* im 5., 6., 7. und 9. Schuljahr mit je einer Wochenlektion dotiert, im 8. und 9. Schuljahr können Schulen zusätzlich ein Wahlfach anbieten. Etwa die Hälfte dieser Lektionen kann für den Informatikunterricht genutzt werden.

Das knappe Zeitbudget macht deutlich, dass Informatik-Kompetenzen interdisziplinär in unterschiedlichen Schulfächern gefördert werden müssen. Der Modullehrplan *Medien und Informatik* enthält daher einen Kompetenzaufbau für die gesamte obligatorische Schulzeit. Daraus leitet sich der Anspruch an die Pädagogischen Hochschulen ab, Dozierende für diese Aufgabe weiterzubilden und hierzu entsprechende Inhalte in die fachdidaktischen Lehrveranstaltungen sowie in die Aus- und Weiterbildungskurse der (Praxis-)Lehrpersonen aufzunehmen. An der PHGR läuft dieser Prozess im Fachbereich Mathematik in Bezug auf Informatik-Kompetenzen schon seit einigen Jahren.

Der Lehrplan 21 beschreibt für den Bereich Medien vier und für die Informatik drei Kompetenzen. Alle Fachbereiche müssen während der gesamten obligatorischen Schulzeit zu einem entsprechenden Kompetenzaufbau beitragen. Die Informatik-Kompetenzen sind folgende:

1. Die Schülerinnen und Schüler können Daten aus ihrer Umwelt darstellen, strukturieren und auswerten.
2. Die Schülerinnen und Schüler können einfache Problemstellungen analysieren, mögliche Lösungsverfahren beschreiben und in Programmen umsetzen.
3. Die Schülerinnen und Schüler verstehen Aufbau und Funktionsweise von informationsverarbeitenden Systemen und können Konzepte der sicheren Datenverarbeitung anwenden.

Im Projekt *Mathematik und Informatik* der PHGR werden interdisziplinäre Lernangebote entwickelt, erprobt und evaluiert (vgl. Matter et al. 2018). Bezüglich Informatik liegt der Fokus vorerst auf der 2. Kompetenz. Im folgenden Kapitel werden exemplarisch einzelne Lernangebote aus diesem Projekt vorgestellt.

Mathematik und Programmieren

Die obligatorische Schulzeit ist gemäß Lehrplan 21 in drei Zyklen unterteilt, nämlich Kindergarten (zwei Jahre) und 1./2. Schuljahr (Zyklus 1); 3. bis 6. Schuljahr (Zyklus 2) und 7. bis 9. Schuljahr (Zyklus 3). In Zyklus 1 programmieren die Schülerinnen und Schüler Bee- oder Blue-Bots. In den weiteren Zyklen liegt der Fokus auf der Steuerung einer Schildkröte (Turtle-Grafik) auf dem Display. Verwendet werden dazu die textbasierten Programmiersprachen LOGO (Zyklus 2) und Python (Zyklus 3).

Zyklus 1

Ein Lernangebot in Zyklus 1 basiert auf *Eckenhausen*, einer Aufgabe aus dem Zahlenbuch 1 (vgl. Wittmann et al. 2012, S. 187 ff.). Gefördert werden in mathematischer Hinsicht (neben weiteren Kompetenzen) das räumliche Vorstellungsvermögen und das Erkennen, Beschreiben und Nutzen räumlicher Beziehungen. Die Schülerinnen und Schüler müssen unterscheiden zwischen Begriffen, welche Orte oder Lagen (links, rechts, …), relative Lagen (links von, ...) oder Bewegungen beschreiben (nach rechts, nach links, …). Entsprechend der Auffassung der Mathematik als

Wissenschaft der Muster und Strukturen erkennen und erforschen die Lernenden Muster und deren Beziehungen untereinander (vgl. Matter 2017, S. 34 ff.). Im konkreten Fall geht es hauptsächlich um das Pascaldreieck.

Die Schülerinnen und Schüler benötigen für die Steuerung der Bee-Bots lediglich vier Befehle (vorwärts, rückwärts, nach links, nach rechts). Diese stehen auch als Befehlskarten zur Verfügung (vgl. Abb. 1).

Abb. 1: Befehlskarten

Bei allen Aufgaben bewegt sich der Bee-Bot ausschließlich auf einer quadratischen Matte mit einem schachbrettförmigen Straßensystem und einigen markierten Orten (vgl. Abb. 2).

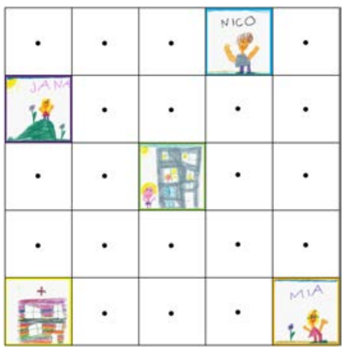


Abb. 2: Matte mit Straßensystem

Tabelle 1 zeigt den Aufbau des Lernangebots. Die Kinder lösen zunächst Aufgaben durch das Abschreiten von Wegen auf einem großen Plan (im Schulzimmer oder auf dem Pausenplatz), danach durch das Einzeichnen auf einer verkleinerten Version des Planes und durch das anschließende Programmieren des Bee-Bots. Sie überlegen sich Wege im Voraus und halten diese mit Symbolfolgen, entweder mit selbst geschriebenen Symbolen oder mit Befehlskarten, fest. Diese Repräsentationswechsel finden auch in umgekehrter Richtung statt. Die Lernenden tauschen sich in der Gruppe oder mit der Lehrperson über ihre Lösungen aus und generieren dadurch vertiefte

Einsichten und lernen weitere Strategien kennen. Führt der Bee-Bot ein Programm aus, so erhalten die Schülerinnen und Schüler ein unmittelbares Feedback zur Korrektheit ihrer Eingaben. Erprobt wurde das Lernangebot in einem Kindergarten (nur Teile I und II, siehe Tab. 1) und in einer Klasse des 2. Schuljahres. Die Schülerdokumente stammen aus dem 2. Schuljahr.

Teil I	Wie können Mia und Jana zur Schule gelangen? Zeichnet einige Wege mit verschiedenen Farben in den Plan ein. Wer hat den längeren Schulweg? Jana oder Mia? Begründet.
Teil II	Das Taxi fährt von der Schule immer ein Wegstück. Welche Felder können erreicht werden? Das Taxi fährt von der Schule immer zwei Wegstücke. Welche Felder können erreicht werden? Male die Zielfelder mit Farbe an. Was fällt dir auf? Wie sieht es mit drei, vier oder mehr Wegstücken aus? Was vermutest du? Kontrolliere mit dem Bee-Bot.
Teil III	Starte mit Mia. Wohin kann Mia gelangen, wenn sie… …ein Wegstück fährt? …zwei Wegstücke fährt? …drei Wegstücke fährt? Färbe die erreichten Felder auf deinem Mini-Plan. Lege für jeden Weg eine Befehlskette mit den Befehlskarten oder schreibe die Befehlskette auf.
Teil IV	Wie viele verschiedene Wege hat Mia zur Schule, wenn sie keine Umwege macht? Zeichne die verschiedenen Wege in deinen Mini-Plan ein und programmiere den Bee-Bot für alle möglichen Wege. Lege wieder für jeden Weg eine Befehlskette mit den Befehlskarten oder schreibe die Befehle auf. Wie viele verschiedene kürzeste Wege gibt es zu den einzelnen Feldern in Eckenhausen von Mia aus?

Tabelle 1: Aufgaben aus dem Lernangebot (Zyklus 1)

Bei den ersten Aufgaben fanden die Schülerinnen und Schüler mehrere Wege und zeichneten diese auf einem verkleinerten Plan ein. Sie fanden den kürzesten Weg durch Auszählen der Wegstücke. Einige Lernende vermochten erst dank dem Bee-Bot durch das Auszählen der *Vorwärts*-Befehle die korrekte Anzahl zu bestimmen. Die Zweitklässlerinnen und Zweitklässler, welche das Lernangebot erprobten, mussten in ihrer bisherigen Schulzeit kaum Antworten begründen. Einige konnten dank dem Austausch in der Lerngruppe bereits richtige Argumentationen in präzisere Begründungen umformulieren (vgl. Abb. 3).

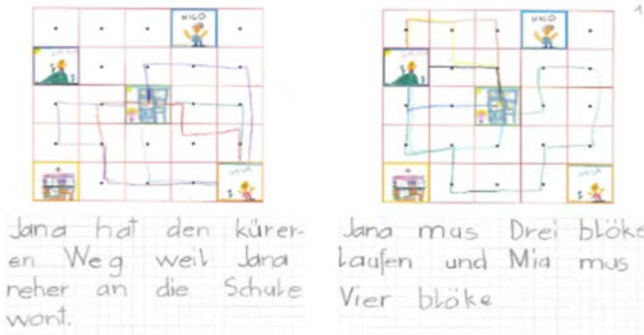


Abb. 3: Schülerdokument zu Teil I

Abb. 4: Schülerdokumente zu den Teilen II und III

Die Aufgaben aus den Teilen II und III fielen den Kindern leicht. Durch abwechselnde Färbung kam das Schachbrettmuster deutlich zum Ausdruck (vgl. Abb. 4). Im Klassengespräch können bei Teil III weitere Matten beim

Feld von Mia hinzugelegt werden, so dass der Zusammenhang zwischen den Teilen II und III noch deutlicher wird.

Die Schülerinnen und Schüler protokollieren die Befehle mit Pfeilen, Symbole welche bereits im Kindergarten verwendet werden können. Als Vorbereitung auf Teil IV kann im Klassengespräch das Thema *verschiedene Wege zum gleichen Ziel* mithilfe von Schülerdokumenten aus Teil III aufgegriffen werden. Die letzte Aufgabe in Teil IV führt zum Muster des Pascaldreiecks (vgl. Abb. 5).

70	35	15	5	1
35	20	10	4	1
15	10	6	3	1
5	4	3	2	1
1	1	1	1	MIA

Abb. 5: Lösung zu Teil IV und Schülerdokument

Leider war die Anzahl der Lektionen für die Erprobung zu knapp bemessen. Einige Schülerinnen und Schüler vermochten lediglich noch die Anzahl der Wege von Mia zur Schule zu bestimmen und zu protokollieren (vgl. Abb. 5).

Zyklus 2

Mehrere Lernangebote für Zyklus 2 wurden bereits im Rahmen des Projekts *Programmieren in Primarschulen* (ab 2010, vgl. Einleitung) erprobt und überarbeitet. Einem dieser Angebote ist eine Fragestellung aus einer Aufgabe aus dem Lehrmittel *Mathematik 6 Primarstufe* übergeordnet (vgl. Keller et al. 2016, S. 322): Mit welchen regelmäßigen Vielecken können Parkettierungen, welche aus einer einzigen Grundfigur bestehen, erzeugt werden? In diesem Lernangebot lässt sich leicht die Berechnung der

Winkelsumme von (regelmäßigen) Vielecken verständnisorientiert herleiten.

Verschiedene Programmierumgebungen stehen für das Programmieren mit LOGO zur Verfügung. Seit 2017 arbeitet die PHGR mit XLOGOONLINE des Ausbildungs- und Beratungszentrums für Informatikunterricht der ETH Zürich, welche auch als Offline Version erhältlich ist (vgl. Hromkovič 2018). Für die gesamte Lernsequenz genügen fünf Befehle, nämlich *fd* (forward, vorwärts), *rt* (right, rechts drehen), *repeat* (wiederhole), *cs* (clear screen, Grafikbildschirm löschen) sowie für die Definition eigener Befehle *to name … end*. Weitere Befehle wie *bk (backward, rückwärts)* oder *lt (left, links drehen)* können zusätzlich eingeführt werden.

```
Gleichseitiges Dreieck
fd 100 rt 120
fd 100 rt 120
fd 100 rt 120

repeat 3 [fd 100 rt 120]

to dreieck
repeat 3 [fd 100 rt 120]
end
```

```
Quadrat
fd 100 rt 90
fd 100 rt 90
fd 100 rt 90
fd 100 rt 90

repeat 4 [fd 100 rt 90]

to quadrat
repeat 4 [fd 100 rt 90]
end
```

```
regelm. Fünfeck
fd 100 rt 72
fd 100 rt 72
fd 100 rt 72
fd 100 rt 72
fd 100 rt 72

repeat 5 [fd 100 rt 72]

to fuenfeck
repeat 5 [fd 100 rt 72]
end
```

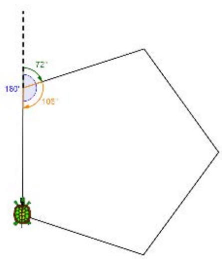
```
to neck :n
repeat :n [fd 100 rt 360/:n]
end
```

```
to neck2 :n  :s
repeat :n [fd :s rt 360/:n]
end
```

Abb. 6: Befehle für regelmäßige Vielecke

Die Schülerinnen und Schüler schreiten regelmäßige Vielecke ab. Ein Kind spielt Schildkröte und die anderen befehlen, was es tun soll. Dabei können als Unterstützung Vielecke auf dem Fußboden vorgezeichnet werden. Nachfolgend erzeugen die Schülerinnen und Schüler gleichseitige Dreiecke, Quadrate, regelmäßige Fünf-, Sechs- und Achtecke auf dem Display mit LOGO-Befehlen. Das Siebeneck kann vorerst wegen der periodischen Maßzahl für den Innenwinkel weggelassen werden. Die Lehrperson verabredet mit den Lernenden, dass die Schildkröte nach dem Zeichnen eines Vielecks wieder in die gleiche Richtung schaut wie zuvor. Die Schildkröte bewegt sich pro Seite eine bestimmte Anzahl Schritte vorwärts und dreht nachfolgend um einen bestimmten Winkel (vgl. Abb. 6). Insgesamt dreht sich die Schildkröte beim Zeichnen eines vollständigen Vielecks um 360°, daher entspricht der Drehwinkel pro Seite dem Quotienten aus 360° und der Anzahl der Ecken.

Aus dem Drehwinkel der Schildkröte ergibt sich der Innenwinkel des regelmäßigen Vielecks und die entsprechende Winkelsumme (vgl. Abb. 7). Mithilfe der tabellenförmigen Auflistung der Werte für Dreiecke, Vierecke, Fünf-, Sechs- und Achtecke lässt sich der entsprechende Wert für Siebenecke und der funktionale Zusammenhang zwischen Eckenzahl und Winkelsumme erschließen. In Zyklus 2 genügt eine sprachliche Formulierung des Zusammenhangs: Für die Winkelsumme eines regelmäßigen Vielecks wird die um 2 verminderte Anzahl der Ecken mit 180° multipliziert. Falls im weiteren Verlauf der Lernsequenz beim Programmieren auch Parameter eingeführt werden (vgl. Abb. 6), könnte bereits an dieser Stelle für die Anzahl der Ecken *n* als Parameter verwendet werden: *Winkelsumme = (n-2)·180°* Diese Herleitung einer Funktions-vorschrift für Winkelsummen kann mit anderen, traditionellen Herleitungen in Beziehung gesetzt werden. So können die Schülerinnen und Schüler den funktionalen Zusammenhang veranschaulichen, indem sie regelmäßige Vielecke mittels Diagonalen von einer Ecke aus in Dreiecke unterteilen.



Winkelsumme in regelmässigen Vielecken

n-Eck	Innenwinkel	Summe
3eck	60°	180°
4eck	90°	360°
5eck	108°	540°
6eck	120°	720°
7eck		900°
8eck	135°	1080°

Abb. 7: Herleitung der Winkelsumme

Für das Parkettieren mit regelmäßigen Vielecken ist es sinnvoll, den *repeat*-Befehl und Unterprogramme (bzw. das Definieren eigener Befehle) einzuführen (vgl. Abb. 6). Die Lernenden erzeugen selbständig Parkettierungen aus regelmäßigen Vielecken. Dies wird ihnen nur mit gleichseitigen Dreiecken, Quadraten und regelmäßigen Sechsecken gelingen. Das Programmieren fördert hier das Verständnis für die Ursachen dieser Tatsache und ermöglicht den Schülerinnen und Schülern, fundierte Begründungen ihrer Antworten zu formulieren (vgl. Abb. 8).

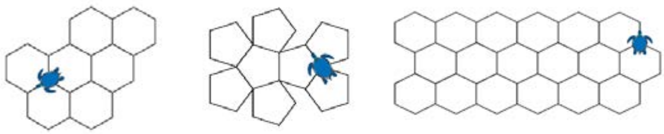
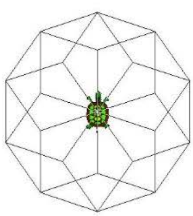


Abb. 8: Parkettierungen aus regelmäßigen Fünf- und Sechsecken

Bei der Erzeugung umfangreicher Parkette können die Lernenden ihre Fähigkeiten im modularen Aufbau von Programmen weiterentwickeln.

Zyklus 3

In Zyklus 3 wird mit Python (und der Programmierumgebung TigerJython) mit einer neuen Programmiersprache gearbeitet. Es werden vorerst bekannte Aufgaben aus Zyklus 2 aufgegriffen und in Python programmiert. Der Vergleich der beiden Programmiersprachen am Mandala-Beispiel (vgl. Abb. 9) zeigt, dass in Python die Befehle für die Steuerung der Schildkröte geladen werden müssen. Es folgen die Definitionen der eigenen Befehle und schließlich das Hauptprogramm, wobei *MakeTurtle ()* das Grafikfenster öffnet. Bei der Programmiersprache LOGO werden die eigenen Befehle im Editor definiert und können nachfolgend direkt in der Befehlszeile von XLOGOONLINE oder in weiteren Befehlsdefinitionen aufgerufen werden.



```
to fuenfeck
repeat 5 [fd 100 rt 72]
end
to mandala5 :n
repeat :n [fuenfeck rt
360/:n]
end
```

```
from gturtle import*

def fuenfeck ():
    repeat 5:
        forward (100
        right (72)

def mandala5 (n):
    repeat n:
        fuenfeck ()
        right (360/n

makeTurtle ()
n = input ("n?")
mandala5(n)
```

Abb. 9: Vergleich von LOGO und Python

Die Erprobung eines Lernangebots für Zyklus 3 ist zur Zeit der Verfassung des vorliegenden Beitrags im Gange. Fokussiert wird hierbei eine Aufgabe aus dem Lehrmittel Mathematik 2 Sekundarstufe (vgl. Keller et al. 2012, S. 43). Die Lernenden programmieren eine Analoguhr mit Ziffernblatt, Stunden- und Minutenzeiger. Die Zeiger sollen sich mit korrekter Geschwindigkeit bewegen. Mit der Programmierung einer Analoguhr können Erkenntnisse aus Zyklus 2 wiederaufgenommen und weitergeführt werden (z. B. das Bestimmen und Programmieren von Winkeln). Zudem können Kenntnisse zu Programmierstrukturen und -konzepten anhand einer professionellen Programmiersprache ergänzt und vertieft werden.

Erste Erkenntnisse aus den Erprobungen

Das Projekt *Mathematik und Informatik* fokussiert die Erprobung von Lernangeboten, welche im Spiralcurriculum beider Fachbereiche sinnvoll eingebettet sind. Da der Lehrplan 21 erst mit dem Schuljahr 2018/19 eingeführt wurde, konnten die Lernangebote in allen Zyklen nur mit Schülerinnen und Schülern erprobt werden, welche zuvor noch keinen Programmierunterricht hatten. Aus der Analyse der Schülerdokumente, aus Unterrichtsbeobachtungen und aus Rückmeldungen der Lehrpersonen konnten trotzdem erste Erkenntnisse gezogen werden, welche in die Überarbeitung der Lernangebote einfließen werden:

- Für einen nachhaltigen Wissensaufbau sind häufige Wechsel zwischen unterschiedlichen Repräsentationen förderlich (vgl. Prediger et al. 2013, S. 14). Bei den erprobten Lernangeboten vollziehen die Lernenden Repräsentationswechsel zwischen realen oder vorgestellten Bildern, in Worten beschriebenen Bildern oder Wegen, selbst gezeichneten Grafiken, abgeschrittenen Wegen und Figuren, geschriebenen Symbolen oder Befehlskarten, Programmiersprachen sowie Bildern auf dem Bildschirm.
- Das Entwickeln von Algorithmen und Programmieren kann die Abstraktions-, Verallgemeinerungs- und Problemlösefähigkeiten der Lernenden fördern (vgl. Matter 2011, S. 13 ff.).
- Es gelingt den Kindern zunehmend besser, räumliche Beziehungen zu erkennen und Perspektivenwechsel vorzunehmen.

- Die Lernenden können verstehensorientiert argumentieren dank dem Formulieren und Programmieren von Algorithmen zu vorgegebenen Problemen.
- Fortschritte im Programmieren zeigen sich auch in der Geschwindigkeit des Programmierens.
- Das Programmieren begünstigt die Selbstkontrolle. Die Lernenden können ohne die Unterstützung der Lehrperson Fehler erkennen und korrigieren.
- Die Motivation der Schülerinnen und Schüler ist durchwegs hoch.

Ausblick

Erprobungen mit Schülerinnen und Schülern der Zyklen 2 und 3, welche bereits über Erfahrungen im Programmieren verfügen, werden vermutlich zu weiteren Erkenntnissen führen. Weitere Lernangebote sollen entwickelt und erprobt werden. Diese beziehen sich neben dem Kompetenzbereich *Raum und Form* auch auf die beiden anderen Bereiche des Lehrplans 21 (*Zahl und Variable; Größen, Funktionen, Daten und Zufall*). Dabei werden auch bestehende und neue Lerngelegenheiten zum *Physical Computing* einbezogen.

Die Lernangebote orientieren sich an den Kompetenzformulierungen des Lehrplans 21 und damit gleichzeitig an fundamentalen Ideen. So kann beispielweise das Lernangebot aus Zyklus 1 (*Eckenhausen*) in den weiteren Zyklen mit Aufgaben zur Idee *Koordinaten* weitergeführt werden. In Bezug auf das Programmieren ist der Übergang von Zyklus 2 zu 3 auf gutem Weg. Mit Python steht zugleich eine Programmiersprache zur Verfügung, welche sich auch für die Sekundarstufe II eignet (numerische Integration, regula falsi, Fraktale, dynamische Systeme usw.). Für den Übergang von Zyklus 1 zu 2 werden zurzeit an der ETH Zürich in XLOGOONLINE die Bee-Bot-Befehle (und der *repeat*-Befehl) als Blocks integriert. So können die Lernenden zu Beginn des zweiten Zyklus (3./4. Schuljahr) den Übergang zu einer textbasierten Programmiersprache leichter bewältigen.

Mathematik und Informatik sind nicht nur als Strukturwissenschaften eng miteinander verwandt, sondern beinhalten auch zahlreiche gemeinsame Teilgebiete wie die diskrete Mathematik oder die Kryptographie. Daher kann der interdisziplinäre Unterricht dieser beiden Fachbereiche weit über das Programmieren hinaus weiterentwickelt werden. Für die Umsetzung des Lehrplans 21 muss der interdisziplinäre Unterricht zudem weitere Fächer (Sprache, Sport, technisches Gestalten u. a.) einbeziehen.

Literatur

Erziehungs-, Kultur- und Umweltschutzdepartement Graubünden (2016): Lehrplan 21; Medien und Informatik. Fassung vom 15.03.2016.

Hromkovič, J. (2018): einfach INFORMATK 5/6 Programmieren. Baar: Klett und Balmer.

Keller, B.; Keller, R.; Diener, M.; Kummer, V.; Meyer-Rieser, E.; Schelldorfer, R.; Studer Brodmann, H. (2016): Mathematik 6 Primarstufe. Handbuch. Zürich: Lehrmittelverlag.

Keller, F.; Bollmann, B.; Rohrbach, C.; Schelldorfer, R. (2012): Mathematik 2 Sekundarstufe, Themenbuch. Zürich: Lehrmittelverlag.

Matter, B. (2011): Kluger Spaß: Programmieren in der Primarschule. In: BILDUNG SCHWEIZ (11a), S. 13-16.

Matter, B. (2017): Lernen in heterogenen Lerngruppen. Erprobung und Evaluation eines Konzepts für den jahrgangsgemischten Mathematikunterricht. Wiesbaden: Springer (Research).

Matter, B.; Jörg, D.; Klingenstein, P.; Lütscher, P. (2018): Themendossier Mathematik und Informatik. Unveröffentlichtes Manuscript.

Prediger, S.; Komorek, M.; Fischer, A.; Hinz, R.; Hußmann, S.; Moschner, B.; Ralle, B.; Thiele, J. (2013): Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. In: M. Komorek; S. Prediger (Hg.): Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme. Münster: Waxmann, S. 9-23.

Wittmann, E. C.; Müller, G. N.; Hengartner, E.; Wieland, G. (2012): Schweizer Zahlenbuch 1. Begleitband. 2. Auflage. Zug: Klett und Balmer.

Wie viel Digitalität in der Fachausbildung?

Reinhard Oldenburg

Anlässlich der Möglichkeit, eine fachwissenschaftliche Analysis-I-Vorlesung halten zu können, wurde reflektiert, welche Rolle Werkzeuge und Denkweisen der Informatik in einer solchen Veranstaltung spielen können. Es werden Möglichkeiten, aber auch Grenzen deutlich und Optionen für die Zukunft diskutiert.

Einleitung

Es wird häufig Reformbedarf in der Fachmathematikausbildung konstatiert, beispielsweise hat Meyerhöfer in den Mitteilungen der DMV (2018) eine „kollektive professionelle Verweigerungshaltung" gegenüber Änderungen an Anfängerveranstaltungen festgehalten. Die Kritik an der bisherigen Lehre speist sich zum einen aus den hohen Durchfallquoten, zum anderen - speziell für die Lehrerbildung - aus der Diskontinuität am Übergang von der Schule zur Hochschule.

In diesem Beitrag wird von einer Analysis-I-Vorlesung berichtet, die vom Autor, also von einem Didaktiker gehalten wurde und in deren didaktischer Konzeption die obigen Desiderate bedacht wurden. In diesem Beitrag liegt der Fokus auf der Bedeutung der Computer für die so gestaltete Lehre.

Rahmenbedingung und Konzeption

Die Analysis-I-Vorlesung besteht aus 4 SWS Vorlesung, 2 SWS Globalübung mit eher einfachen Aufgaben zu Technik, Beweismethodik und anderen grundlegenden Kompetenzen (Einiges wurde dabei aus dem Buch Ableitinger & Herrmann (2013) übernommen) sowie 2 SWS Übung zu den Hausaufgaben. Die Gestaltungsfreiheit des Dozenten ist durch eine traditionelle Modulbeschreibung und die nötige Kompatibilität mit dem Rest des Studiums (insbesondere Analysis-II, die von einer anderen Professorin gelesen werden würde) eingeschränkt.

In der Vorbereitung wurde die Literatur zum Thema gesichtet. Man findet einiges zu methodischen Fragen (etwa Wiki, Kollaboration, Online-Tests), Global-Effekt-Untersuchungen (aber meist ohne Details zur Lehre) sowie

Anleitungsbücher zur Umsetzung bestimmter Berechnungen in bestimmten Computeralgebrasystemen, z.B. "Analysis mit Maple". Weniger findet man eine stoffdidaktische Durcharbeitung der Analysis oder eine Analyse, wie Technologie die Argumentations- und Beweisprozesse ändert. Deswegen wurde die Planung weitgehend auf eigene Überlegungen basiert, die hier nicht ausführlich dargestellt werden können. Immerhin seien aber die folgenden „Big Ideas“ erwähnt, die realisiert werden sollten:

- Genetisches Vorgehen: Entstehungsprozesse der Mathematik sollten erlebt werden können, d.h. Mathematik sollte nicht als Fertigprodukt vermittelt werden, sondern es sollte bedacht werden, wie Themen in den Fragehorizont der Studierenden gebracht werden können.
- Forschendes Lernen: Es sollte von Anfang an authentisch dargestellt werden, wie Arbeitsprozesse der Mathematik laufen. Dazu wurde etwa auf dem ersten Arbeitsblatt zur Aussagenlogik die Aufgabe gestellt, zu erforschen, wie sich die Logik ändert, wenn man den dritten Wahrheitswert „unbestimmt“ hinzunimmt, und zu bewerten, ob dies nützlich ist.
- Vernetzendes Lernen: Es wurde einerseits horizontal, im Wesentlichen mit Physik und Informatik vernetzt, andererseits vertikal, indem Beweismethoden wieder aufgegriffen wurden.
- Formalisierung prozesshaft: Gemäß der Idee (Oldenburg 2015), dass der Weg von intuitiven Ideen zu formalen Konzepten als eine Modellbildung zu verstehen ist, wurde besonderer Wert darauf gelegt, Formalisierungen anzubahnen und Alternativen zu durchdenken.

Ergänzend waren folgende „Small Ideas“ wichtig:

- Anknüpfung an die Schulmathematik
- Einteilung der Aufgaben in Fingerübungen, (Globalübung), geschlossenen und offene Aufgaben
- Methodik: Live-Fragen, Erwartungsbildungspausen (etwa am Anfang eines Beweises wird etwas gezeigt, dann gefragt „Wie könnte es weitergehen?“ und eine Minute Pause eingelegt).

Informatische Aspekte

Für die Planung der Rolle der digitalen Medien und allgemeiner der Nutzung informatischer Denk- und Arbeitsweisen muss zunächst eine Bestandsaufnahme erfolgen. Die Studierenden sollten im Prinzip einige Erfahrungen aus der schulischen Informatik mitbringen, denn in Bayern ist Informatik am NW-Gymnasium Pflichtfach, so dass die Mehrheit der Studierenden etwas programmieren können sollte. Die Realität ist allerdings anders. Auch mathematische Software wie Geogebra ist eher unbekannt. Die Ausgangslage ist also ernüchternd.

Ebenfalls zu bedenken waren die Ergebnisse von Oldenburg & Weygandt (2013). Bei dieser in Frankfurt durchgeführten Studie sind wir der Frage nachgegangen, ob Studierende CAS (vor allem den limit-Befehl) nutzen können, um verschiedene Ableitungsbegriffe zu vergleichen. Die Erkenntnis war, dass das meist daran scheitert, dass die Studierenden nicht sicher sind, ob sie ein ggf. negatives Resultat der Unfähigkeit des CAS oder prinzipiellen Problemen zuschreiben sollten. Dieses Attributionsproblem lässt sich nur vermeiden, wenn man sich auf algorithmisch entscheidbare Bereiche einschränkt, oder auf die Vorbildrolle des CAS verzichtet. Die Aussicht auf Zielerreichung ist also auch ernüchternd.

Für die weitere Planung hat es sich als gewinnbringend erwiesen, die Integrative Medienpädagogik von Horst Hischer (2003) zu Grunde zu legen. Hischer definiert drei Säulen:

1. Computer als Unterrichtsmittel [Mediendidaktik]. Dies bedeutet etwa, dass ein Funktionsplotter genutzt wird, um zu erkunden, wie die Gestalt der Graphen von x^n von $n \in \mathbb{Z}$ abhängt.
2. Computer als Unterrichtsinhalt [Medienkunde]. Wie stellen Computer Funktionsgraphen dar und welche Konsequenzen hat das für Eigenschaften, die evtl. nicht erkennbar sind?
3. Anleitung zum bewussten und kritischen Gebrauch [Medienerziehung].

In der Analysis-I kann man diese Bereiche füllen (eine detaillierte Darstellung folgt):

1. Visualisieren, Beispiele durchrechnen lassen
2. Algorithmen wie Newton-Verfahren – eher randständig
3. Überabzählbarkeit und Unberechenbarkeit.

Es hat sich weiter gezeigt, dass es eine sinnvolle Erweiterung um eine vierte Säule gibt:

4. Automatisierung von Rechnungen als mathematische Arbeitsweise (Metaperspektive) [Computational Thinking in der Mathematik]

Diese vier Säulen werden im Folgenden genauer untersucht.

Mediendidaktik

Visualisierungen mit Geogebra wurden vom Dozenten häufig eingesetzt, die Dateien wurden zur Verfügung gestellt und die Studierenden wurden ermutigt, sich damit zu beschäftigen. Allerdings wurde dies nirgends verbindlich eingefordert. Beispiele:

- Aussagenlogische Gesetze (z.B. Äquivalenz von $\neg((x>0)\rightarrow(y>0))$ und $(x>0) \wedge (y<0)$) .
- Die Addition, Multiplikation, Potenzierung und Wurzeln in den komplexen Zahlen.
- Folgenkonvergenz und Stetigkeit: ε-Streifen.
- Funktionsmikroskop, insbesondere bei $x^n \cdot \sin(1/x)$

Ebenfalls in den Bereich der Mediendidaktik gehört das Zeigen von automatisierten Verfahren, die mit Maxima realisiert wurden:

- Berechnung von (Taylor-)Reihen, Sinus, π, ….
- Bernsteinpolynome: Gleichmäßige Approximation.

Medienkunde

Dies existierte weitgehend nicht in meiner Analysis I, weil die Ziele der Veranstaltung andere sind. Während man in Bereichen wie etwa der Stochastik (Hypothesentests oder Grundlagen von Rechtschreib-korrektur, ...), der linearen Algebra (Empfehlungen, Clusteranalyse, …), der Numerik (GPS,…) und erst Recht in der diskreten Mathematik (kürzeste

Wege, maximale Flüsse, …) viele Anwendungen hat, in denen die Mathematik erhellt, wie Computer und ihre Anwendungen funktionieren, ist das in der Analysis nicht so. Es gibt dafür die triviale Erklärung, endliche oder abzählbare Strukturen seien gut für Informatik. Das ist richtig und falsch zugleich. Es kommt nicht auf die Endlichkeit der Strukturen, sondern auf die der Algorithmen an – und da hat die Analysis in der Tat wenig zu bieten.

Medienerziehung

Hierzu kann die Analysis beitragen durch eine kritische Reflexion ihrer Objekte. Bei der Diskussion von Bijektionen von Mengen werden Themen wie die Abzählbarkeit der natürlichen und rationalen Zahlen, der Terme und Programmtexte im Gegensatz zur Überabzählbarkeit der reellen Zahlen behandelt und damit wird deutlich, dass es sprachlich unreferenzierbare und damit auch unberechenbare reelle Zahlen gibt. Weitergehend führt das zur Existenz nicht entscheidbarer Aussagen (Termvereinfachung; Berechnung von Grenzwerten) aber auch zur Klärung bestimmter entscheidbarer Teilbereiche (z.B. Polynomfaktorisierung).

Einen etwas anderen Beitrag in diesem Kontext liefert die Würdigung der Bedeutung der Approximation durch Polynome für das praktische Rechnen, da letztlich nur Polynome über den rationalen Zahlen von einem digitalen Rechner angemessen berechnet werden können.

Computational Thinking in der Mathematik

Computational Thinking ist ein Ausdruck der von Jeanette Wing (2008) eingeführt wurde und in der Informatikdidaktik weitgehend konsensfähig ist. Die wesentlichen Komponenten hat sie in einem Diagramm dargestellt, das sich auch bei Wikipedia (Abb. 1, https://en.wikipedia.org/wiki/Computational_thinkingComputational Thinking) findet.

Für die Mathematik und insbesondere die Analysis kann Computational Thinking bedeuten, dass man Erkenntnis durch die Reflexion über algorithmische Prozesse gewinnt. Wenn man mit der Reifikationstheorie konform geht und Objekte als Verdinglichung von Prozessen sieht (Sfard 1994), dehnt sich dieser Einfluss auf die Objekte selbst aus.

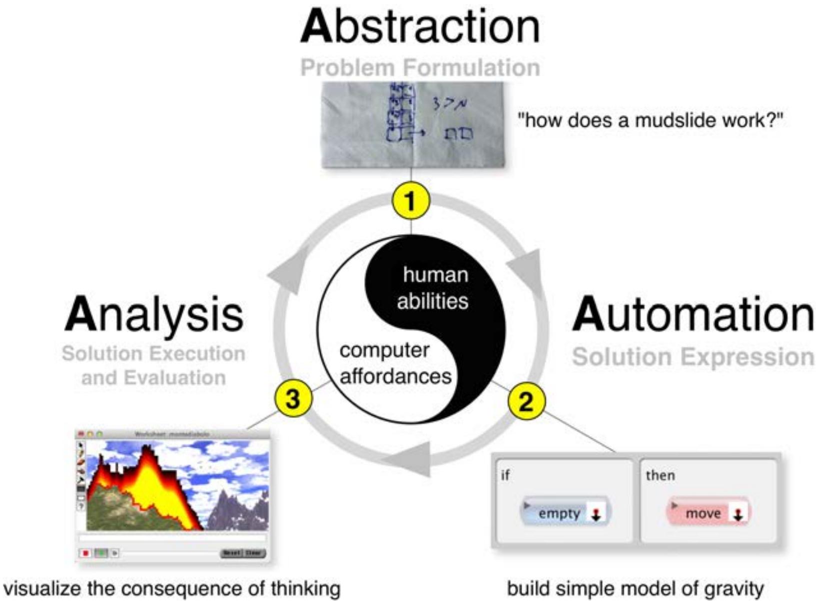


Abb. 1: Computational Thinking (Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Computational_thinking#/media/File:The_Computational_Thinking_Process.jpg).

Sätze und Algorithmen sind in einer solchen Sicht eng verwandt. Die einen haben Voraussetzungen, die anderen Eingabespezifikationen; Sätze liefern Schlüsse, Algorithmen Ausgaben. Beide benötigen Beweise ihrer Korrektheit. In der Tat lassen sich viele Algorithmen direkt als Beweise lesen.

Ein erstes Beispiel: Durch Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe kann jeder vorgegebene Wert als Grenzwert erhalten werden.

```
a=1.4  # Das Ziel
eps=0.01 # Max Fehler

n=1 # der ungerade Index des nächsten Summanden
m=2 # Der gerade index des nächsten Summanden

S=0.0 # Die Partialsumme
rechnung=""
```

```
while True:
    if S<a:
        S=S+1.0/n
        rechnung+="+1/"+str(n)
        n=n+2
    else:
        rechnung+="-1/"+str(m)
        S=S-1.0/m
        m=m+2
    if abs(a-S)<eps: break
print rechnung
print S
print S-a
```

Die Analyse dieses Algorithmus zeigt Folgendes: Man addiert immer positive oder negative Summanden, je nachdem, ob man den Wert vergrößern oder verkleinern muss. Damit kann man den Abstand überbrücken, denn die positive und die negative Teilreihe divergieren jeweils, so dass beliebig große Partialsummen gebildet werden können. Gleichzeitig werden die Summanden immer kleiner, so dass man die Ungenauigkeit unter jede Grenze drücken kann. Noch zu diskutieren wird folgender Umstand sein: Um den Satz zu beweisen, setzte man die maximal tolerierte Abweichung `eps` auf 0. Damit terminiert der „Algorithmus“ nicht mehr (im strengen Sinne ist es damit kein Algorithmus).

Als zweites Beispiel betrachten wir den Zwischenwertsatz: $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ sei stetig und $f(a)\cdot f(b)<0$, dann $\exists x_0\in(a,b):f(x_0)=0$.

Ein algorithmischer Beweis geht so: Man setzt $m:=(a+b)/2$. Falls $f(m)=0$: Ende. Sonst: Falls $f(a)f(m)<0$, dann $b:=m$, sonst $a:=m$. Dann iteriert man. Das Intervallschachtelungsprinzip liefert die Korrektheit.

Nota bene: Hier liegt (wie schon oben) kein Algorithmus im engeren Sinne der Informatik vor, weil die Bedingung der Terminierung verletzt ist!

Das dritte Beispiel ist der Satz vom Maximum: Ein stetiges $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ nimmt sein Maximum an. Der Beweis erfolgt wieder über wiederholte Intervallhalbierung: Man setzt $m:=(a+b)/2$ und wählt $[a,m]$ oder $[m,b]$, je nachdem, in welchem Teilintervall das Supremum größer ist.

Auch das ist kein Algorithmus im Sinne der Informatik, weil dieses Vorgehen nicht terminiert und, noch schlimmer, Teile hat (Supremumsbestimmung), die nicht effektiv durchführbar sind. Trotzdem kann man eindeutig von algorithmischem Denken sprechen.

Weitere Beispiele, die algorithmisch zu beweisen sind: Monotoniesatz und der Satz über die gleichmäßige Approximation stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen durch Treppenfunktionen.

Damit ist gezeigt, dass es eine mathematikspezifische Form von Computational Thinking gibt, die einen verallgemeinerten Algorithmusbegriff verwendet.

Erkenntnisse

Die Veranstaltung wurde im 14-Tage Rhythmus evaluiert. Insgesamt gab es dabei sehr positive Reaktionen und insbesondere fand der Medieneinsatz volle Zustimmung (100%). Es gab vereinzelte vertiefte Nachfragen von Studierenden, die etwas nachprogrammieren wollten. Ergebnisse in der Klausur waren leicht besser als in den vergangenen Jahren, der Anteil der Digitalisierung lässt sicher aber nicht bestimmen.

Ausblick: Optionen für Schule und Universität

Es könnte sich lohnen, operative Definitionen genauer zu untersuchen. Beispielsweise hat Weber (2016) vorgeschlagen, die Grundvorstellung vom Logarithmus als Zahl, wie oft man sukzessive durch die Basis teilen kann, bevor der Quotient kleiner als die Basis wird, zu entwickeln. Dies führt unmittelbar zur Einsicht: $\log_b(a_1 \cdot a_2) = \log_b(a_1) + \log_b(a_2)$ und damit kann der Logarithmus berechnet werden:

```
a=137.0  # Muss >1 sein
b=10.0

x=a
l=0.0 # Ergebnisakkumulator
m=1.0
i=0
while i<20:
   i=i+1
   if x>=b:
```

```
            l=l+m; x=x/b
        else:
            x=x*x; m=m/2
    print l
```

In diesem Sinne sind noch viele weitere Dinge denkbar, die sich beispielsweise mit Scratch umsetzen lassen.

Zurück zur universitären Analysis: Bisher wurden wenig digitale Werkzeuge eingesetzt, aber es gab viel Computational Thinking. Als Option für die Zukunft könnte man versuchen, das Erstere auszubauen. Es wäre denkbar, die Studierenden verbindlich in den Übungen mit Geogebra oder Maxima arbeiten zu lassen. Eine weitere, ganz andere Idee wäre umsetzbar, wenn es gelänge, das CAS Mathematica (ggfs. online) den Studierenden zur Verfügung zu stellen. Das Folgende zeigt, wie man dann die quantorenlogische Formulierung von Konzepten der Analysis umsetzen könnte. In Mathematica wird ausgedrückt, dass eine Funktion an einer Stelle differenzierbar ist und die Ergebnisse zeigen die Mächtigkeit der Verarbeitung:

```
In[13]:= diffbar[f_, x0_] := Exists[m, ForAll[ϵ, ϵ > 0 ⇒ Exists[δ,
           δ > 0 ∧ ForAll[x, x ≠ x0 ∧ Abs[x - x0] < δ ⇒ Abs[f[x] - (f[x0] + m * (x - x0)) ] < ϵ * Abs[x - x0]]]]]

In[14]:= Resolve[diffbar[Function[{x}, 1 / x^2], a], Reals]
Out[14]= a < 0 || a > 0

In[15]:= Resolve[diffbar[Function[{x}, Sqrt[x - 5]], a], Reals]
Out[15]= a > 5

In[16]:= Resolve[diffbar[Function[{x}, Abs[x - 5]], a], Reals]
Out[16]= a < 5 || a > 5
```

Abb. 2: Quantoren in Mathematica

Im nächsten Durchgang der Analysis I wird es das Ziel sein, die Studierenden aktiver an den gezeigten Konzepten zu beteiligen.

Literatur

Ableitinger, Ch., Herrmann, A. (2013). Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra. Springer.

Hischer, Horst (2002). Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht. Hildesheim: Franzbecker.

Meyerhöfer, W. (2018). Mitteilungen der DMV. Heft 1, 26-30.

Oldenburg, R. (2015). Gains and pitfalls of quantifier elimination as a teaching tool. Int. J. Technol. Math. Educ. 22, No. 4, 163-167.

Oldenburg, R., Weygandt, B. (2016). Einsatzmöglichkeiten und Grenzen von Computeralgebrasystemen zur Förderung der Konzeptentwicklung. In: Hoppenbrock, A. (ed.) et al.: Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze. Wiesbaden: Springer.

Sfard, A., Linchevski, L. (1994).The gains and the pitfalls of reification - the case of algebra. Educ. Stud. Math. 26, No. 2-3, 191-228 (1994).

Weber, C. (2016). Making logarithms accessible — operational and structural basic models for logarithms. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(Suppl. 1), 69–98.

Wing, J. M. (2008). "Computational thinking and thinking about computing". Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 366 (1881): 3717.

Einsatz von CAS und DGS im Mathematikunterricht –eine Befragung von Lehrkräften

Anje Ostermann, Hendrik Härtig, Lorenz Kampschulte, Mathias Ropohl, Julia Schwanewedel, Anke Lindmeier

Lehrkräfte sollen Medien im Unterricht nutzen (BMBF, 2016; KMK, 2016). Dabei sind Medien mit Blick auf die Ausstattung und oberflächliche Nutzungscharakteristika Gegenstand unterschiedlicher Untersuchungen, wobei Untersuchungen mit fachspezifischem Fokus rar sind. Wie die Nutzung von Medien im Fachunterricht konkret aussieht, ist damit nicht geklärt. In diesem Beitrag werden die Konzeption und erste Ergebnisse einer Befragung von Lehrkräften vorgestellt, die eben diese Lücke in der Beschreibung von Medieneinsatz im Fachunterricht für den math.-nat. Fachunterricht adressieren soll.

Motivation und Hintergrund

Aktuell wird der Einsatz von Medien im Unterricht auf allen Ebenen gefordert (BMBF, 2016; KMK, 2016; KMK, 2003; auf Landesebene vgl. bspw. MSB, 2014). Der Medieneinsatz ist Gegenstand verschiedener Untersuchungen, wobei oft die Ausstattung mit unterschiedlichen Medien oder oberflächliche Nutzungscharakteristika untersucht werden (vgl. BITKOM, 2014; Initiative D21, 2016; differenzierter für den MINT-Bereich: Lorenz et al., 2017; mit Fokus auf Qualität des Medieneinsatzes: Murböck, Sailer & Fischer, 2017). Eine Beschreibung des Medieneinsatzes im Fachunterricht scheint aus einer überfachlichen Perspektive jedoch nicht ausreichend zu sein, vielmehr ist der fachspezifische Blick auf das Medium und seine Funktion, die es im Lernprozess erfüllt, notwendig für eine differenzierte Beschreibung des fachspezifischen Medieneinsatzes und seiner Bedingungen (Härtig et al., 2018).

Aus der Forschung zur Akzeptanz und Nutzung neuer Technologien können zur Beschreibung von Technologie- bzw. Medieneinsatz unterschiedliche Modelle herangezogen werden wie beispielsweise die theory of planned behavior (vgl. Ajzen, 1985; Ajzen & Madden, 1986), allgemeinere Wert-Erwartungstheorien (vgl. Eccles, 1983) oder das technology-acceptance-model (vgl. Davis, 1989; Venkatesh & Davis, 2000). Eine qualitative Beschreibung verschiedener Akzeptanzstufen (technischer) Innovationen ermöglichen die stages of concern (Hall & Hord, 2006). Für den schulischen Kontext werden zudem Will/Skill/Tool-Modelle (Christensen & Knezek, 2008) angewendet, um zu erklären wie Merkmale der Lehrkräfte den Medieneinsatz bedingen. In ihrer Arbeit zeigt Prasse (2012) auf, dass all diese Modelle Merkmale auf der individuellen Ebene (Einstellungen, Selbstwirksamkeitserwartung) und auf der organisationalen/schulischen Ebene (Ausstattung mit Technologien, Regelungen zur Nutzung) als Einflussfaktoren auf Technologie-bzw. Mediennutzung identifizieren. Für den Mathematikunterricht stellt sich die Frage danach, inwiefern auch hier diese Mechanismen zu beobachten sind. In diesem Beitrag werden die ersten deskriptiven Ergebnisse einer Befragung von Lehrkräften vorgestellt. Die Zusammenhänge zwischen Rahmenbedingungen und Mediennutzung werden nicht diskutiert.

Forschungsfragen

Vorbereitend zu der Frage nach der Identifizierung von Einflussfaktoren auf den Medieneinsatz stellen sich die Fragen nach der Gestaltung der Rahmenbedingungen zur Nutzung und der Nutzungshäufigkeit fachspezifischer Medien, in diesem Fall Computer-Algebra-Systeme (CAS) und Dynamische Geometrie-Software (DGS). Dieser Beitrag bezieht sich deswegen auf folgende vorbereitende Fragestellungen:

1) Werden CAS und DGS im Mathematikunterricht genutzt?
2) Wie häufig nutzen die Lehrkräfte CAS und DGS im Unterricht?
3) Wie sind die Rahmenbedingungen zur Nutzung von CAS und DGS auf Seiten der Lehrkraft und auf Seiten der Schule?

Anlage der Befragung

Stichprobe

Die vorläufige Stichprobe besteht aus 160 Mathematiklehrkräften aus ganz Deutschland, von denen 45 % weiblich sind. Die Befragung erfolgte online und postalisch, wobei zum einen Schulen direkt angefragt wurden, die

Fragebögen an die entsprechenden Lehrkräfte weiterzuleiten und zum anderen Lehrkräfte auf einschlägigen Lehrkräftetagungen (z. B. dem MNU-Bundeskongress) direkt angesprochen und auf die Befragung aufmerksam gemacht wurden.

Fragebogen

Der Fragebogen besteht aus zwei Teilen. In dem ersten Teil werden Hintergrundvariablen zur Person wie Unterrichtserfahrung, Geschlecht und Erwerb medienbezogenen Wissens erfragt. Daneben wurden die Selbstwirksamkeitserwartung (Ostermann et al., in Vorbereitung, adaptiert nach Meinhardt, Rabe & Krey, 2016) und die Einstellungen gegenüber dem Medieneinsatz allgemein (BITKOM, 2014) und gegenüber digitalen Medien im Unterricht (Lindau, Kübler & Spada, 2013) erhoben. Der zweite Teil erfasst die fachspezifischen Nutzungscharakteristika. Es wird gefragt, welche Medien im Mathematikunterricht genutzt werden. Um die Vergleichbarkeit zu verbessern, wurde der Frage eine Beschreibung der Situation, in der die Lehrkräfte die genutzten Medien einsetzen, vorangestellt. Dabei wurden Inhalt und Klassenstufe vorgegeben und die Lehrkräfte gebeten, die ungefähre Nutzungsdauer für eine solche Situation für verschiedene Medien anzugeben (vgl. Abb. 1). Eine Ergänzung der Medien durch die Lehrkräfte war möglich.

Von den ca. 180 Minuten einer durchschnittlichen Unterrichtseinheit nutzen die Schülerinnen und Schüler …	
... ein Computer-Algebra-System	ca. _____ Minuten.
... eine Dynamische Geometrie-Software	ca. _____ Minuten.
______________________________	ca. _____ Minuten.

Abb. 1 :Auszug zur Erfassung der Nutzung verschiedener Medien im Mathematikunterricht.

In welcher Funktion Medien im Unterricht eingesetzt werden, wird am Beispiel von Computer-Algebra-Systemen und Dynamischer Geometrie-Software erhoben. Die Operationalisierung der Funktionen erfolgt ähnlich dem Vorgehen von Sailer, Murböck und Fischer (2017) über die Lernaktivitäten beim Medieneinsatz, wurden in diesem Fall jedoch über die in der fachdidaktischen Literatur beschriebenen potenziellen Medienfunktionen ausdifferenziert (vgl. Abb. 2). Um auch hier eine bessere Vergleichbarkeit zu gewährleisten, wurden das Thema vorgegeben und die

Lehrkräfte aufgefordert, an eine bestimmte Klasse zu denken und für diese die auf den Unterricht bezogenen relativen Häufigkeiten anzugeben.

Wie oft führen Ihre Schülerinnen und Schüler folgende Lernaktivitäten typischerweise bei der Nutzung von CAS im Mathematikunterricht zum Thema Lösen quadratischer Gleichungen durch? **Meine Schülerinnen und Schüler nutzen das CAS im Mathematikunterricht …**	In keiner oder fast keiner Unterrichtsstunde	In weniger als der Hälfte der Unterrichtsstunden	In mindestens der Hälfte der Unterrichtsstunden	In jeder oder fast jeder Unterrichtsstunde
… zum Überprüfen eigener Berechnungen.	□	□	□	□
… zum Herausfinden von Zusammenhängen und Regeln.	□	□	□	□

Abb. 2: Auszug aus der Erhebung der Nutzungsweise am Beispiel CAS.

Ebenfalls medienspezifisch wurden die stages of concern für jeweils CAS und DGS erhoben. Die Skala wurde für die Medien CAS und DGS nach Köller et al. (2009, adaptiert für die Bildungsstandards nach Hall & Hord, 2006) adaptiert. Außerdem wurde die Verfügbarkeit von CAS und DGS erhoben (vgl. Abb. 3).

Erste Ergebnisse

1) Werden CAS und DGS im Mathematikunterricht genutzt?

Um herauszufinden, ob CAS und DGS im Mathematikunterricht genutzt werden, wurden die Lehrkräfte gebeten, die Nutzungsdauer verschiedener Medien für eine typische Unterrichtsstunde anzugeben (vgl. Abb. 1). Für die Auswertung wurden die Nennungen der Nutzungsangaben von CAS und DGS gezählt, ohne die angegebene Nutzungsdauer zu berücksichtigen. Eine DGS wird von mehr als der Hälfte der Lehrkräfte genannt (55 %), während ein CAS von nur jeder zehnten Lehrkraft genannt wird (14 %). Zum Vergleich: das Schulbuch ist das am häufigsten genannte Medium und wird von drei von vier Lehrkräften genannt (76 %).

2) Wie häufig nutzen Lehrkräfte CAS und DGS?

Die Nutzungshäufigkeit wurde mit Hilfe der Frage in Abbildung 2 jeweils für CAS und DGS erhoben. Dabei wurden in der Analyse der Nutzungshäufigkeit nur Lehrkräfte berücksichtigt, die angeben, über das jeweilige Medium zu verfügen (s.u., CAS: 64 %, DGS: 94 %). Für die folgenden Analysen wurden in einem ersten Schritt die Kategorien „in mindestens der Hälfte der Unterrichtsstunden“ und „in jeder oder fast jeder der Unterrichtsstunden“ zusammengefasst, da es nur wenige Angaben auf der höchsten Stufe gab. Des Weiteren wurde für die Bildung einer akkumulierten Nutzungshäufigkeitsvariable der maximale Nutzungswert über alle Lernaktivitäten genutzt, ohne die Bandbreite der Einsatzmöglichkeiten von CAS und DGS zu berücksichtigen.

Damit ergibt sich ein Maß mit drei Stufen, wobei die höchste Stufe bedeutet, dass die Schülerinnen und Schüler das CAS bzw. DGS in mindestens jeder zweiten Unterrichtsstunde nutzen. Es wird daher davon ausgegangen, dass ihnen die Geräte jederzeit zur Verfügung stehen, diese durchgängig genutzt werden und ihnen gängige Arbeitsweisen bekannt sind. Entsprechend der Erwartungen zeigt sich, dass die Nutzungshäufigkeit für das DGS insgesamt höher ausfällt als für das CAS (vgl. Abb. 6).

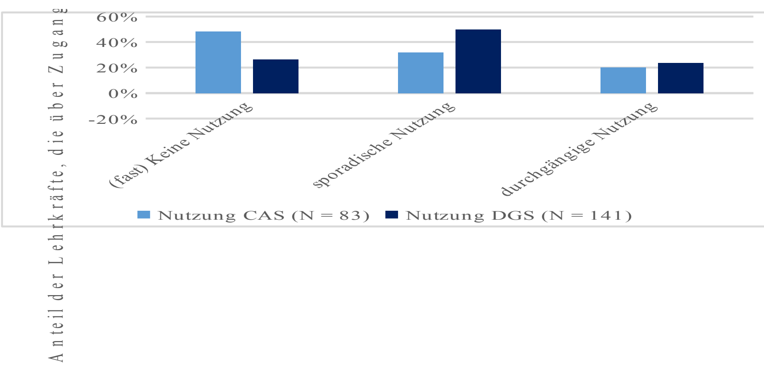


Abb. 6: Nutzungshäufigkeit von CAS und DGS.

Jede zweite Lehrkraft, die die Systeme nach eigener Angabe zur Verfügung hat, nutzt demnach das CAS kaum, während das DGS von etwa jeder zweiten Lehrkraft zumindest sporadisch genutzt wird. Insgesamt zeigt sich, dass die Nutzung von DGS deutlich ausgeprägter ist als die Nutzung von CAS.

3) Wie sind die Rahmenbedingungen auf Seiten der Lehrkraft und auf Seiten der Schule zur Nutzung von CAS und DGS?

Die Rahmenbedingungen der Mediennutzung wurden auf zwei Ebenen untersucht. Neben der individuellen Ebene (Lehrkraft) wird die organisationale/schulische Ebene berücksichtigt. Auf Seiten der Schule wurde die Verfügbarkeit der sowie die schulinternen Regelungen zu den Mathematikwerkzeugen untersucht. Auf Seiten der Lehrkräfte wurde die Selbstwirksamkeitserwartung in Bezug auf das Unterrichten mit Medien erhoben.

Zugang zu CAS und DGS. Die Verfügbarkeit wurde mit einem Item erfragt, wobei die Antwortmöglichkeiten eine Abstufung nach unterrichts-organisatorischem Aufwand darstellen (vgl. Abb. 3).

CAS sind an meiner Schule…
□ für alle Lernenden ab einer bestimmten Jahrgangsstufe immer verfügbar.
□ für alle Lernenden bei Bedarf als mobiler Klassensatz verfügbar.
□ für alle Lernenden bei Bedarf im Computerraum verfügbar.
□ in Form einzelner Geräte bei Bedarf verfügbar.
□ nicht verfügbar.

Abb. 3: Erhebung der Verfügbarkeit von CAS.

Es zeigt sich, dass jede dritte Lehrkraft angibt, über keinen Zugang zu CAS zu verfügen, während nur jede 20. Lehrkraft angibt, keinen Zugang zu einem DGS zu haben. Geben die Lehrkräfte an, einen Zugang zu CAS bzw. DGS zu haben, ist jedoch der wahrgenommene Zugang nur für jede vierte Lehrkraft mit geringem unterrichts-organisatorischen Aufwand möglich und für alle Lernenden verfügbar („für alle Lernenden ab einer bestimmten Jahrgangsstufe immer verfügbar“ oder „für alle Lernenden als mobiler Klassensatz verfügbar“). Für drei von vier Lehrkräften, die angeben über einen Zugang zu CAS bzw. DGS zu verfügen, wird ein erhöhter unterrichts-organisatorischer Aufwand wahrgenommen („für alle Lernenden bei Bedarf im Computerraum“ oder „in Form einzelner Geräte verfügbar“). Insgesamt geben die Lehrkräfte zwar an, Zugang zu den Geräten zu haben, dieser ist für die Lehrkräfte jedoch noch mit einem erhöhten Aufwand verbunden.

Schulinterne Regelungen. Die schulinternen Regelungen bezüglich der Nutzung von CAS und DGS in der Schule wurden mit Hilfe der Frage in Abbildung 4 erhoben. Die Antworten wurden in einem ersten Schritt nach dem Vorhandensein bzw. Nicht-Vorhandensein einer solchen Regelung dichotomisiert. Gut die Hälfte der Lehrkräfte geben an, über keine Regelung an der Schule zur Nutzung von CAS zu verfügen, für DGS ist dieser Anteil nur wenig geringer.

An meiner Schule…
□ gibt es keine schulinternen Regelungen zu CAS.
□ gibt es eine einheitliche Regelung zu CAS und zwar wird….
□ ein eigenständiges CAS genutzt (z. B. Derive, Maxima).
□ ein CAS integriert im grafischen Taschenrechner genutzt.
□ ein CAS integriert in ein Geometrie-System genutzt (z. B. GeoGebra).
□ kein CAS genutzt.

Abb. 4: Erhebung der schulinternen Nutzungsregelungen bzgl. CAS.

Selbstwirksamkeitserwartung in Bezug auf das Unterrichten mit Medien. Die Selbstwirksamkeitserwartung wurde mit Hilfe einer Skala aus 6 Items mit einer 4-stufigen Likert-Skala erhoben (vgl. Abb. 5, adaptiert nach Meinhardt, Rabe & Krey, 2016). Die Reliabilität ist zufriedenstellend (Cronbachs $\alpha = .77$, $N = 155$).

Bitte bewerten Sie, inwiefern Sie den folgenden Aussagen zustimmen.	ichtstimmt	aumstimmt	eherstimmt	enaustimmt
Ich kann in meiner Unterrichtsplanung zu den Lernzielen passende Einsätze digitaler Medien planen, auch wenn meine Schule nicht optimal mit digitalen Medien ausgestattet ist.	□	□	□	□
Ich kann den fachlichen Lernprozess durch den Einsatz digitaler Medien unterstützen, auch wenn unvorhergesehene Verständnisschwierigkeiten auftreten.				

Abb. 5: Auszug aus der Erhebung der Selbstwirksamkeitserwartung in Bezug auf das Unterrichten mit Medien.

Insgesamt zeigt sich, dass die Lehrkräfte angeben, eine hohe Selbstwirksamkeitserwartung in Bezug auf die Planung und Durchführung von Unterricht mit Medien zu haben. Der Skalenmittelwert liegt bei 2.8 ($SD = 0.54$) auf der Skala von 1 bis 4 und damit im Bereich der Zustimmung, so dass die Lehrkräfte sich selbst beim Umgang mit Hindernissen beim Einsatz von Medien im Unterricht als kompetent einschätzen.

Diskussion und Ausblick

Die Ergebnisse zeigen einen ersten Eindruck der Nutzung von DGS und CAS in der Sekundarstufe I sowie der Rahmenbedingungen zur Nutzung auf Seiten der Lehrkraft und der Schulen. Die Analysen zeigen, dass DGS und CAS an den Schulen zwar vorhanden sind, sich das jedoch für die Systeme unterschiedlich abbildet und auch große Unterschiede zwischen den Angaben der Lehrkräfte bestehen. Dabei ist zu betonen, dass in dieser Studie die Verfügbarkeit nicht objektiv, sondern aus Sicht der Lehrkräfte erhoben wurde. In der Stichprobe zeigt sich eine geringere Nutzungshäufigkeit der CAS gegenüber DGS. Dies ist mit Blick in die bildungsadministrativen Vorgaben erklärbar, da viele Länder den Einsatz von DGS als verpflichtenden und den Einsatz von CAS als optionalen Bestandteil des Mathematikunterrichts beschreiben. Es deutet sich also ein Einfluss von Vorgaben auf die Nutzungshäufigkeit an. Inwiefern solche Einflüsse durch weitere Rahmenbedingungen auf der Ebene der Schulen gestärkt oder geschwächt werden, wird Gegenstand weiterer Analysen sein. Ebenso soll auch ein möglicher Einfluss der individuellen Merkmale der Lehrperson auf die Nutzungshäufigkeiten untersucht werden. Eine parallel angelegte Befragung für die naturwissenschaftlichen Fächer bietet die Möglichkeit eines Vergleichs zwischen dem Mathematikunterricht und dem naturwissenschaftlichen Unterricht. Daran lässt sich erkennen, welche Ansatzpunkte zur Verringerung der noch immer deutlichen Lücken zwischen dem geforderten und realisierten Medieneinsatz im Mathematikunterricht vielversprechend sind.

Die Befragung wurde durch die Joachim Herz Stiftung gefördert.

Literatur

Ajzen, I. (1985). From intentions to actions: A theory of planned-behavior. In J. Kuhl & J. Beckmann (Hrsg.). *Action-control: From cognition to behavior*. Heidelberg: Springer. 11–39.

Ajzen, I. & Madden, T.J. (1986). Prediction of goal-directed behavior: attitudes, intentions, and perceived behavioral control. *Journal of Experimental Social Psychology, 22*, 453-474.

BITKOM (2015). Digitale Schule – vernetztes Lernen. Ergebnisse repräsentativer Schüler- und Lehrerbefragungen zum Einsatz digitaler Medien im Schulunterricht. https://www.bitkom.org/noindex/Publikationen/2015/Studien/Digitale-Schulever netztesLernen/BITKOM-Studie-Digitale-Schule-2015.pdf. [28.08.18]

BMBF (2016). Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft. Strategie des Bundesministeriums für Bildung und Forschung. Berlin: BMBF. https://www.bmbf.de/files/Bildungsoffensive_fuer_die_digitale_Wissensgesellschaft.pdf [18.11.2016]

Christensen, R. & Knezek, G. (2008). Self-report measures and findings for information technology attitudes and competencies. In J. Voogt & G. Knezek (Hrsg.), *International handbook of information technology in primary and secondary education.* Berlin: Springer. 349–365.

Davis, F. D. (1989). Perceived usefulness, perceived ease of use, and user acceptance of information technology. *MIS Quarterly*, *13*, 319–340.

Eccles, J. S. (1983). Expectancies, values, and academic choice: Origins and changes. In J. Spence (Hrsg.). *Achievement and achievement motivation.* San Francisco: W. H. Freeman. 87–134.

Hall,G. E. & Hord, S. M. (2006): Implementing change :Patterns, principles, and potholes. Boston, MA: Pearson Education.

Initiative D21 (2016): Sonderstudie „Schule Digital“. Lehrwelt, Lernwelt, Lebenswelt: Digitale Bildung im Dreieck SchülerInnen-Eltern-Lehrkräfte. Berlin.

KMK (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. München, Neuwied: Wolters Kluwer Deutschland.

KMK (2016). Strategie der Kultusministerkonferenz „Bildung in der digitalen Welt“. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 8.12.2016. Bonn: KMK.

Lindau, B., Kübler, S. & Spada H. (2013). Entwicklung und Überprüfung eines Modells der Bereitschaft zum Medien- und Technologieeinsatz bei weiblichen und männlichen Lehramtsstudierenden, *Unterrichtswissenschaft, 41*, 20–37.

Lorenz, R., Bos, W., Endberg, M. (2017): Schule digital – der Länderindikator 2017. Schulische Medienbildung in der Sekundarstufe I mit besonderem Fokus auf MINT-Fächer im Bundesländervergleich und Trends von 2015 bis 2017. Münster: Waxmann Verlag.

Ministerium für Schule und Berufsbildung des Landes Schleswig-Holstein (2014). Fachanforderungen Mathematik. Kiel: Schmidt & Klaunig.

Pant, H. A., Vock, M., Pöhlmann, C., & Köller, O. (2008). Offenheit für Innovationen. Befunde aus einer Studie zur Rezeption der Bildungsstandards bei Lehrkräften und Zusammenhänge mit Schülerleistungen. *Zeitschrift für Pädagogik, 54*(6), 827–845.

Prasse, D. (2012). *Bedingungen innovativen Handelns in Schulen. Funktion und Interaktion von Innovationsbereitschaft, Innovationsklima und Akteursnetzwerken am Beispiel der IKT-Integration an Schulen*. Münster: Waxmann Verlag.

Rabe, T., Meinhardt, C., & Krey, O. (2012). Entwicklung eines Instruments zur Erhebung von Selbstwirksamkeitserwartungen in physikdidaktischen Handlungsfeldern. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 18*, 293–315.

Sailer, M., Murböck, J. & Fischer, F. (2017). Digitale Bildung an bayerischen Schulen – Infrastruktur, Konzepte, Lehrerbildung und Unterricht. https://www.vbw-bayern.de/Redaktion/Frei-zugaengliche-Medien/Abteilungen-GS/Bildung/2017/Downloads/Bi-0146-001_vbw_Studie_Digitale-Bildung-an-bayerischen-Schulen.pdf [17.10.2018].

Venkatesh, V. & Davis, F.D. (2000). A theoretical extension of the technology acceptance model: Four longitudinal field studies, *Management Science*, *46*, 186–204.

Das Wendeplättchen-Applet
Potenziale und Grenzen eines Einsatzes in Lernumgebungen für den Primarstufenbereich

Melanie Platz

Im Rahmen dieses Beitrags wird ein in der Entwicklung befindliches, frei verfügbares Applet, welches das virtuelle Legen von Wendeplättchen ermöglicht, vorgestellt. Besonders für digitale Endgeräte mit Touchscreen-Display (z.B. Tablet-PCs), die somit eine Steuerung durch Touch-Gesten mit den Fingern ermöglichen, ist das Applet geeignet. Es kann sowohl als Veranschaulichungsmittel, als auch im Sinne des aktivistischen Lernens als Anschauungsmittel eingesetzt werden (vgl. Krauthausen, 2018). Um eine gewisse Offenheit des Einsatzes des Applets zu gewährleisten, werden bewusst keine Strukturierungshilfen vorgegeben. Das Applet kann so in den Funktionen als Mittel zur Zahldarstellung, als Mittel zum Rechnen sowie als Argumentations- und Beweismittel eingesetzt werden. Erste Ergebnisse einer Pilotuntersuchung zu den Einsatzmöglichkeiten in Lernumgebungen für den Primarstufenbereich sowie zu den Potenzialen und Grenzen des Applets werden vorgestellt.

Einleitung

Im Projekt „Entwicklung eines Wendeplättchen-Applets“ wird die Forderung der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK) aufgegriffen, dass bei der Digitalisierung der Bildung der „Primat des Pädagogischen” (KMK, 2016, S.51) verfolgt und in Bildungskonzepte einbezogen werden sollte, bei denen das Lernen im Vordergrund steht (KMK, 2016). Das Potenzial digitaler Medien für den Unterricht kann sich daher nur entfalten, wenn diese sinnvoll und didaktisch reflektiert eingesetzt werden.

Das vorgestellte Projekt verfolgt das Ziel, Lernumgebungen mit digitalen Medien (OpenSource Applets auf Tablet PCs) zur Unterstützung von arithmetischen Fähigkeiten in der Primarstufe zu generieren. Der Fokus des Projektes liegt darauf, klassische Lehr- und Lernprozesse mit digitalen Lernumgebungen zu unterstützen.

Ein zentraler Medienaspekt wird durch eine automatisierte Erfassung des handelnden Umgangs mit Lehr-Lernmaterialien implementiert, um u.a.

maßgeschneiderte Interaktivität für Schülerinnen und Schüler sowie eine sofortige Diagnosefunktion für die Lehrkraft anzubieten.

Um die entwickelten Lernumgebungen zu optimieren, wird Design Science (vgl. March & Smith, 1995) eingesetzt. Design Science ist in der Philosophie des Pragmatismus begründet und schafft Artefakte, in unserem Fall Lernumgebungen, die von Menschen in der Regel für einen praktischen Zweck genutzt werden, in unserem Fall zur Unterstützung arithmetischer Fähigkeiten.

Im Rahmen des Teilprojekts „Prim-E-Proof“ (vgl. Platz, 2019) sollen Möglichkeiten zur Umsetzung präformaler Beweise in der Primarstufe untersucht werden. Als Ausgangspunkt der Applet-Entwicklung wurde deshalb zunächst ein Wendeplättchen-Applet ohne Strukturierungshilfen erstellt, da

> *„Plättchen als Argumentations- oder Beweismittel [...] kein didaktisches Zugeständnis an ›kleine Kinder‹ [sind], sondern ein direkter, unmittelbarer Link zur Genese der Zahlentheorie und der Mathematik als Wissenschaft; und diese Beziehung lässt sich harmonisch in curriculare Kontexte und Absichten des Unterrichts integrieren.“ (Krauthausen, 2018, S. 330).*

Im Folgenden wird die aktuelle Version des Wendeplättchen-Applets vorgestellt sowie zwei exemplarische Lernumgebungen. Die erste Lernumgebung behandelt das Muster legen in Klassenstufe 2, die zweite Lernumgebung das präformale Beweisen in Klassenstufe 4. Ferner werden erste Ergebnisse empirischer Pilotstudien zum Einsatz dieser Lernumgebungen präsentiert.

Das Wendeplättchen-Applet

Das Wendeplättchen-Applet wird derzeit durch die Autorin des vorliegenden Papers entwickelt.[4] Aktuell ermöglicht das Applet das virtuelle Legen von Wendeplättchen. Zum korrekten Ausführen des Applets wird ein Multi-Touch-fähiger Browser benötigt (z.B. Firefox) sowie eine Internetverbindung. Das entwickelte Applet eignet sich besonders für

4 Der Source Code ist in GitHub unter folgendem Link verfügbar: https://github.com/melanie-platz/Wendeplaettchen-Applet

digitale Geräte mit Touchscreen-Display (z. B. Tablet-PCs), die eine Steuerung durch Multi-Touch-Gesten mit den Fingern ermöglichen. Die Plättchen in der App werden ähnlich wie analoge Plättchen dargestellt. Wegen der Zweidimensionalität des Bildschirms sind die Plättchen auch zweidimensional und können nicht angehoben oder gestapelt werden, wie dies bei analogen Plättchen möglich wäre. Unter folgendem Link kann auf das Applet zugegriffen werden:

http://www.melanie-platz.com/WPA/

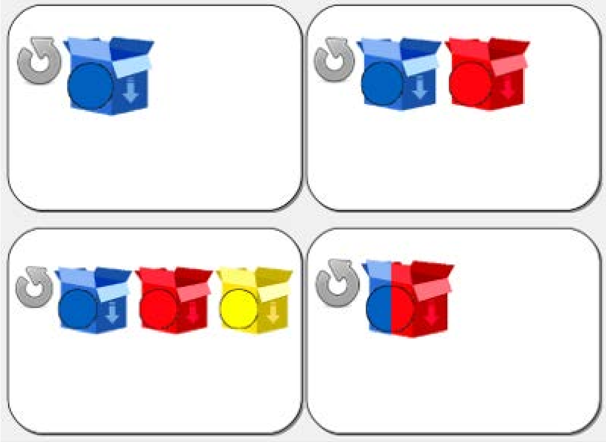


Abb. 1: Screenshot des Startbildschirms des Applets

Auf der Startseite sind vier verschiedene Arbeitsumgebungen auswählbar: Plättchen mit einer, zwei oder drei verschiedenen Farben und eine Umgebung, in der die Farbe des Plättchens durch „antippen“ von blau zu rot und umgekehrt gewählt werden kann.

Bezüglich des SAMR-Modells (Puentedura, 2010) kann der erste Schritt der Weiterentwicklung mit dem Plättchen-Applet abgedeckt werden, bei dem es sich um eine Substitution des analogen Materials handelt. Der zweite Schritt der Weiterentwicklung, die Augmentation (die Technologie dient als direkter Werkzeugersatz mit funktionaler Verbesserung), kann rudimentär abgedeckt werden. Ein Vorteil des Wendeplättchen-Applets besteht darin, dass die organisatorische Handhabung eher alltagstauglich ist (schnell bereitzustellen bzw. geordnet wegzuräumen) (Krauthausen, 2018) als bei analogen Plättchen, da einzelne virtuelle Plättchen nicht innerhalb des Applets verschwinden können.

Der Einsatz des Wendeplättchen-Applets ermöglicht es einen Screencast des Bildschirms der Tablets mit Audio aufzuzeichnen. Diese Möglichkeit des Screencastens ist ein Vorteil, der durch den Technologieeinsatz entsteht, da die Multi-Touch-Gesten der Schülerinnen und Schüler passend zu ihrer mündlichen Argumentation erfasst werden können. In den im nachfolgenden beschriebenen empirischen Pilotstudien wurde das aufgezeichnete Material transkribiert und es wurden Abschnitte extrahiert, in denen Informationen zum Argumentations- und Verstehensprozess sowie zur User Experience herausgearbeitet werden konnten. Aus diesen Abschnitten wurden Videovignetten erstellt.

In der nachfolgenden Beschreibung zweier Lernumgebungen werden diese bezüglich Pedagogical Content Knowledge (PCK), Technological Content Knowledge (TCK) und Technological Pedagogical Knowledge (TPK) betrachtet und eingeordnet. Koehler & Mishra (2009) beschreiben den TPACK-Ansatz (Technology, Pedagogy, And Content Knowledge) als komplexe Interaktion zwischen den drei Wissensgebieten: Inhalt, Pädagogik und Technologie. Das sowohl theoretische als auch praktische Zusammenspiel dieser Wissensbereiche erzeugt das flexible Wissen, das zur erfolgreichen Integration von Technologie in den Unterricht erforderlich ist (Koehler & Mishra, 2009). Im Gegensatz zu dem ursprünglichen Zweck, für den der TPACK-Ansatz konzipiert wurde, d. h. als analytischer Rahmen zur Bestimmung der verschiedenen Arten von Wissen, über die ein Lehrer verfügt, wird es hier in einem breiteren Sinne mit Bezug auf Wissen im Allgemeinen verwendet.

Exemplarische Lernumgebung für Klassenstufe 2: Muster legen

Pedagogical Content Knowledge (PCK): (An-)Zahlen strukturiert erfassen.

Nach Selter et al. (2015) sollten Grundschülerinnen und Grundschüler die Gelegenheit erhalten, mit verschiedensten Anordnungen von Elementen zu arbeiten, Zahlen darzustellen und Anzahlen zu bestimmen, bevor vorstrukturierte Arbeitsmittel eingesetzt werden.

> *„Wesentlich hierbei ist die Verknüpfung und Übersetzung zwischen und innerhalb der verschiedenen Repräsentationsformen wie Handlungen, Bilder, Symbole und Sprache." (Selter et al., 2015, o.S.)*

Diese Verknüpfung und Übersetzung innerhalb der verschiedenen Repräsentationsformen soll durch die in Abb. 2 aufgeführte Aufgabenstellung angeregt werden.

Technological Content Knowledge (TCK): Wendeplättchen als Repräsentation und Photo Collage App zur Archivierung und Sortierung.

Wendeplättchen werden zur Repräsentation verwendet. Durch die Verwendung der App „Photo Collage"[5] soll in Teilaufgabe 3, die kombinatorische Fähigkeiten anspricht, das Erfassen von Möglichkeiten durch Bildschirmfotografien sowie das Vergleichen von gefundenen Möglichkeiten durch die Funktion des Drehens und Verschiebens von Bildern in der App implementiert werden.

Technological Pedagogical Knowledge (TPK): Das Wendeplättchenapplet.

Das Applet wird hier als Mittel zur Zahldarstellung sowie als Argumentations- und Beweismittel eingesetzt**.** Durch die Sozialform der Partnerarbeit sollen durch das Kommunizieren zum einen Argumentationsprozesse und zum anderen Äußerungen zur User Experience im Umgang mit dem Applet angeregt werden.

Empirische Pilotuntersuchung

Im September 2018 nahmen vier Zweitklässlerinnen und Zweitklässler einer lokalen Grundschule in den Räumlichkeiten der Grundschule an der empirischen Pilotstudie teil, wobei eine Schülerin mit dem Förderschwerpunkt Lernen diagnostiziert wurde. Die Schülergruppe wurde in zwei Zweiergruppen eingeteilt. Jede Gruppe bekam zwei Tablets zur Verfügung gestellt - ein Tablet mit dem Wendeplättchen-Applet, das andere Tablet mit

5 CodeSeed Labs (2018): „Photo Collage". Version 2.2.0. https://play.google.com/store/apps/details?id=com.forthplanet.collagemaker

der Photo-Collage-App. Ein Screencast des Bildschirms aller Tablets wurde mit Audio aufgezeichnet. Die Schülerinnen und Schüler arbeiteten 45 Minuten an der Lernstation.

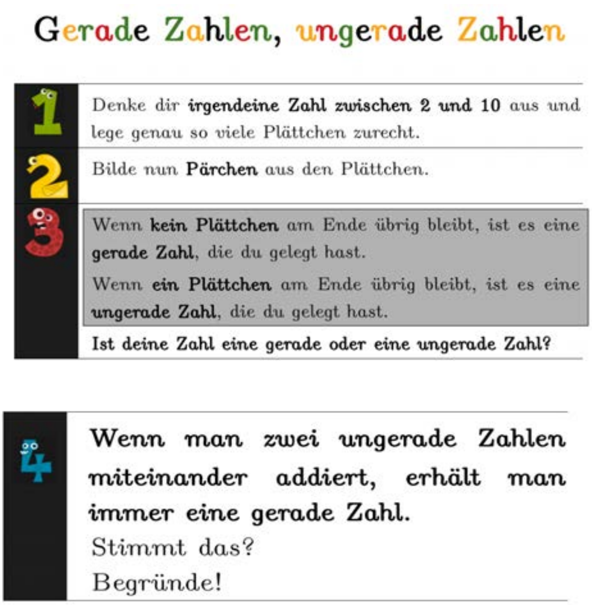
Muster legen

1 Immer **7 Plättchen.** Lege verschiedene Muster.

2 **Beschreibe** Deine Muster.
Woher weißt Du, dass es **genau 7 Plättchen** sind?

3 **3 der 7 Plättchen** sollen **rot** sein.
Wie viele verschiedene Muster findest Du?

Abb.2: Aufgabenstellung zur Lernumgebung „Muster legen“ (Selter et al., 2015).



Gerade Zahlen, ungerade Zahlen

1 Denke dir **irgendeine Zahl zwischen 2 und 10** aus und lege genau so viele Plättchen zurecht.

2 Bilde nun **Pärchen** aus den Plättchen.

3 Wenn **kein Plättchen** am Ende übrig bleibt, ist es eine **gerade Zahl**, die du gelegt hast.
Wenn **ein Plättchen** am Ende übrig bleibt, ist es eine **ungerade Zahl**, die du gelegt hast.
Ist deine Zahl eine gerade oder eine ungerade Zahl?

4 **Wenn man zwei ungerade Zahlen miteinander addiert, erhält man immer eine gerade Zahl.**
Stimmt das?
Begründe!

Abb.3: Aufgabenstellung zur Lernumgebung „Präformales Beweisen“ (vgl. Bezold 2009).

Exemplarische Lernumgebung für Klassenstufe 4: Präformales Beweisen

Pedagogical Content Knowledge (PCK): Präformales Beweisen in der Grundschule.

In dieser Lernumgebung wird der präformale Beweis nach Blum & Kirsch (1991) zur Ermöglichung der Einbeziehung von Beweisen in der Grundschule fokussiert: In Übereinstimmung mit dem Konzept des Action Proofs (vgl. Semadeni, 1984) kann ein präformaler Beweis definiert werden als gültige, nicht formal repräsentierte Schlussfolgerungen, die sich auf gültige, nicht formal repräsentierte Voraussetzungen beziehen. Im Gegensatz zur Definition eines Action Proofs (vgl. Semadeni, 1984) sollten induktive Argumente („etc.“) und indirekte Argumente („stell dir vor ...“ oder „was würde passieren, wenn ...“) in diesem Zusammenhang nicht ausgeschlossen werden. Die Schlussfolgerungen müssen direkt aus dem konkreten Fall verallgemeinerbar sein. Wenn sie formalisiert sind, müssen sie den korrekten formalmathematischen Argumenten entsprechen. Präformale Beweise müssen gültige, korrekte Beweise sein (Blum & Kirsch, 1991). Das Konzept eines präformalen Beweises ist vergleichbar mit dem Konzept des operativen, „inhaltlich-anschaulichen“ Beweises (vgl. u.a. Wittmann, 2014).

Technological Content Knowledge (TCK): Wendeplättchen als Repräsentation.

Wendeplättchen stellen ein Material dar, welches nicht didaktischer, sondern epistemologischer Natur ist, (Wittmann, 2014). Der durch die in Abb. 3 vorgestellte Aufgabe stimulierte präformale Beweis wird nicht von außen aufgepfropft, sondern ist eng mit der Natur der Zahlen verbunden. Um 600 v. Chr. entdeckten und bewiesen Pythagoras und seine Schüler durch Operationen mit Steinchen universelle zahlentheoretische Muster (Wittmann, 2014 und Wittmann & Müller, 2013).

Technological Pedagogical Knowledge (TPK): Das Wendeplättchen-Applet.

Das Applet wird hier als Argumentations- und Beweismittel eingesetzt. Durch die Sozialform der Partnerarbeit sollen durch das Kommunizieren zum einen Argumentationsprozesse und zum anderen Äußerungen zur User Experience im Umgang mit dem Applet angeregt werden.

Empirische Pilotuntersuchung

Im Rahmen eines Schulbesuchs im Mai 2018 im Mathematiklabor „MatheWerkstatt“ der Universität Siegen (Deutschland) nahm eine Schulklasse der vierten Klasse einer örtlichen Regelschule mit 23 Schülern an der empirischen Pilotstudie teil. Die Schulklasse wurde in Gruppen von sechs bzw. fünf Schülern aufgeteilt, die während ihres zweistündigen Aufenthalts an der Universität an verschiedenen Lernstationen arbeiteten. Für die Lernstation wurden drei Tablets zur Verfügung gestellt, bei denen die Schüler in Zweiergruppen mit einem Tablett arbeiteten und ihre Ideen und Ergebnisse diskutierten. In jedem der vier Fälle wurde eine Gruppe von zwei Schülern der drei Schülergruppen videografiert, ein Screencast des Bildschirms der Tablets wurde mit Audio aufgezeichnet. Jede Gruppe arbeitete 20 Minuten an der Lernstation.

Resultate der Empirischen Pilotuntersuchungen bezogen auf die User Experience

Das Wendeplättchen-Applet selbst scheint intuitiv zu sein, die Schülerinnen und Schüler hatten keine Probleme mit dem Applet umzugehen. Es war keine Einführung zur Verwendung des Applets erforderlich. Eine Schülerin der 4. Klasse wollte ungern mit Plättchen arbeiten, da dies als „kindisch“ empfunden wurde. Das Argument der Schülerin war, dass sie bereits gelernt hatte im Zahlenraum bis eine Million zu rechnen, und Plättchen nur für Rechnungen in der ersten Klasse nützlich seien. Aus dem Gespräch mit den Schülerinnen und Schülern lässt sich ableiten, dass die Aufgabe scheinbar nicht verstanden wurde, d. h. es konnte kein Beweisbedürfnis (Kothe, 1979) geweckt werden (vgl. Platz 2019). Ein Wunsch aller Kinder war die Implementation von Gamification in das Applet z.B. durch „Level“ oder durch „Belohnung bei richtigen Ergebnissen“.

Zusammenfassung und Ausblick

Die Prototypen zweier Lernumgebungen mit digitalen Lernwerkzeugen zur Unterstützung von arithmetischen Fähigkeiten in der Grundschule wurde über das TPACK-Framework analysiert und in empirischen Pilotstudien getestet und muss im nächsten Schritt lernzielspezifisch optimiert werden. Nach der Optimierung des Prototypen werden mehrere Fallstudien durchgeführt, um eine Bewertung und Optimierung des neuen Prototyps zu ermöglichen. Der Prototyp soll unter anderem optimiert werden durch Berücksichtigung des entdeckenden Lernens (Winter, 1989). Um ein zählendes Rechnen zu vermeiden, sollen in einem nächsten Schritt erste Strukturierungshilfen eingebaut werden, ohne jedoch die Offenheit des Einsatzes des Applets zu schmälern. Des Weiteren soll der handelnde Umgang mit dem Tablet PC durch das computergestützte Tracking der Multi-Touch-Gesten der Kinder detektierbar gemacht und semiotisch ausgewertet werden. Huth (2013) stellt fest, dass insbesondere Gesten mindestens zeitweise die Funktion von eventuell aktuell nicht verfügbaren oder nicht möglichen Inskriptionen übernehmen können. In einem Kooperationsprojekt mit der Arbeitsgruppe Mathematikdidaktik (Primarstufe) der Goethe-Universität Frankfurt am Main wird dies untersucht.

Literatur

Bezold, A. (2009). Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

Blum, W. and Kirsch, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. Educational Studies in Mathematics, 22(2): 183-203. New York: Springer Publishing Company.

Huth, M. (2013). Mathematische Gestik und Lautsprache von Lernenden. Beiträge zum Mathematikunterricht 2013: 492-495. Münster: WTM-Verlag.

Kothe, S. (1979). Gibt es Entwicklungsmöglichkeiten für ein Beweisbedürfnis in den ersten Schuljahren? Beweisen im Mathe-matikunterricht: Vorträge des 2. Internationalen Symposiums für “Didaktik der Mathematik” von 26.9. bis 29.9. 1978 in Klagenfurt: 275-282. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.

Koehler, M., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge (TPACK)? Contemporary issues in technology and teacher education, 9(1): 60-70.

Krauthausen, G. (2018). Einführung in die Mathematikdidaktik-Grundschule. Springer Spektrum.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2016). Strategie der Kultusministerkonferenz „Bildung in der digitalen Welt“ (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 08.12.2016)[Electronic version]. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2017/Strategie_neu_2017_datum_1.pdf , abgerufen am 12.01.2019.

March, S. T. and Smith, G. F. (1995). Design and natural science research on information technology. Decision support systems.15(4): 251-266. Amsterdam: Elsevier.

Platz, M. (2019): Learning environments applying digital learning tools to support argumentation skills in primary school: first insights into the project, in Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11, February 6-10, 2019). Utrecht, Netherlands: Freudenthal Group, in collaboration with the Freudenthal Institute, of Utrecht University ERME. (angenommen)

Puentedura, R. (2010). SAMR and TPCK: Intro to advanced practice [Electronic version]. http://hippasus.com/resources/sweden2010/SAMR_TPCK_IntroToAdvancedPractice.pdf , zuletzt abgerufen am 12.01.2019.

Selter, C.; Nührenbörger, M.; Wember, F. (2015) Material [Electronic version]. Projekt 'Mathe inklusiv mit PIKAS‘, Technische Universität Dortmund, Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts. https://pikas-mi.dzlm.-de/inhalte/zahlvorstellungen-tragf%c3%a4hige-vorstellungen-aufbauen-zr-bis-100/hintergrund/zahlen-schnell, abgerufen am 12.01.2019.

Semadeni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. For the learning of mathematics, 4(1): 32–34. New York: JSTOR.

Winter, H. (1989). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Braunschweig/ Wiesbaden: Vieweg 1991 (1989).

Wittmann, E. C. and Müller, G. N. (2013). Das Zahlenbuch 4/ Beigleitband. Stuttgart: Ernst Klett Verlag GmbH.

Wittmann, E. (2014). Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik. Mathematica didactica, 37:213–232. Hildesheim: Verlag Franzbecker

Unterrichten mathematiknaher Technologien im Lehramtsstudium

Daniela Schiefeneder

Lernen mathematischer Inhalte mit technologischer Unterstützung ist ein zentraler Aspekt der mathematischen Bildung. Der Erwerb digitaler Kompetenzen stellt infolge einen immer wichtiger werdenden Punkt in der Lehramtsausbildung dar und ist an österreichischen Universitäten fest im Curriculum verankert. Beim Unterrichten mathematiknaher Technologien erweist sich die Steuerung der Lernhandlung der Studierenden durch geeignete Aufgaben als konstruktiv. Damit wird die Formulierung und Auswahl von Aufgaben zum entscheidenden Faktor. Beispiele für verschiedene Aufgabenformate werden aufgezeigt sowie deren Vor- und Nachteile diskutiert.

Einleitung

Digitale Technologien verändern die Strukturen und Arbeitsweisen in nahezu allen Bereichen. In der Digitalisierung liegt großes Potenzial für das Bildungswesen, aber auch eine neue Verantwortung bei den Bildungseinrichtungen, welche nun zudem digitale Kompetenzen vermitteln sollen und welchen damit auch eine neue medienerzieherische Rolle zuteilwird. Digitale Medien und Werkzeuge verändern die Unterrichtskultur. Doch wie können digitale Medien und Werkzeuge sinnvoll eingesetzt werden, um Lehr- und Lernprozesse wirkungsvoll zu unterstützen? Es ergeben sich viele Chancen und Herausforderungen für die Bildungseinrichtungen. Wie eine aktuelle Meinungsumfrage ergab (OGM 2018) fühlen sich viele Lehrkräfte schlecht auf die Digitalisierung vorbereitet und vertreten die Ansicht, dass dies in der Lehrerausbildung eine zu geringe Rolle spielt. Studien (vgl. Hattie 2008, Scharnagl 2014, Drijvers 2015) belegen, dass ein Mehrwert durch den Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge von vielen Faktoren abhängt. Die Universitäten und Hochschulen stehen vor neuen Herausforderungen in der Lehramtsausbildung. Welche Kompetenzen bezüglich der Nutzung digitaler Medien sollten Lehramtsstudierenden im Studium vermittelt werden? Bezüglich Digitalisierung wird den MINT-Fächern eine Schlüsselrolle zugesprochen, (BMBF 2016). In mathematischer und naturwissenschaftlicher Forschung werden digitale Werkzeuge kontinuierlich verwendet, Computerprogramme zur Beantwortung algebraischer Fragestellungen entwickelt, Simulationen erstellt, Probleme modelliert und numerisch gelöst. Für den Mathematikunterricht stehen Lehrkräften neben Präsentationsmedien auch mathematiknahe Technologien wie dynamische Geometriesoftware (DGS), Tabellenkalkulationsprogramme (TK), Computeralgebrasysteme (CAS) sowie Simulations- und Statistiksoftware zur Verfügung, mathematische Algorithmen können in einer Programmiersprache implementiert werden. Die Unterrichtskultur im Fach Mathematik kann sich gravierend ändern. Mathematische Sachverhalte können den Schülerinnen und Schülern mittels geeigneter Technologien experimentell und entdeckend zugänglich gemacht werden. Selbstständiges Arbeiten und Lernen kann durch Nutzung digitaler Medien und Werkzeuge gefördert und erleichtert werden, die Möglichkeit zu individuellem und selbstgesteuertem Lernen kann den Unterricht bereichern und die Rolle der Lehrperson wandeln. Entscheidend bei der Nutzung digitaler Werkzeuge ist ein souveräner Umgang der Lehrkraft mit den Technologien, die Kenntnis der Vorteile und Chancen beim Einsatz entsprechender Software, aber auch ein Bewusstsein über Risiken und Nachteile, vgl. Barzel (2012). Das Vermitteln der Werkzeugkompetenz erfolgt im Rahmen eines Lehramtsstudiums an der Universität Innsbruck in zwei Lehrveranstaltungen, welche von der Autorin in Zusammenarbeit mit anderen Dozenten konzipiert und geleitet wurde und wird. Zunächst wird im Folgenden geklärt, welche Rolle digitale Medien und Werkzeuge an österreichischen Schulen einnehmen sollten. Nachfolgend werden die beiden Lehrveranstaltungen vorgestellt und die Rahmenbedingungen sowie curricularen Bestimmungen für diese Kurse erläutert. Der Erwerb von Bedienkompetenz mathematiknaher Technologien erfolgt am besten über das eigene Arbeiten am PC, was durch Aufgaben gefordert und gefördert werden soll. Die Problematik bei der Wahl der Aufgaben und der Aufgabenstellung wird erläutert.

Einsatz technologischer Hilfsmittel an österreichischen Schulen

Für eine zielgerichtete Ausbildung Lehramtsstudierender mit Unterrichtsfach Mathematik sollte zunächst untersucht werden, wie und in welchem Umfang der Einsatz digitaler Technologien an Schulen gefordert wird. Das Studium an der Universität Innsbruck bildet Lehrkräfte für den Einsatz an

Schulen im Sekundarbereich aus, d.h. Absolventinnen und Absolventen können später an Mittelschulen, polytechnischen Schulen, allgemeinbildenden höheren Schulen sowie mittleren und höheren berufsbildenden Schulen unterrichten. Im Lehrplan für die Sekundarstufe 1 wird als Bildungs- und Lehraufgabe formuliert, dass „*Schüler und Schülerinnen verschiedene Technologien (z.B. Computer) einsetzen können*“ (BMUKK 2000). Als ein didaktischer Grundsatz wird das Arbeiten mit dem Taschenrechner und Computer formuliert:

> *„Die Möglichkeiten elektronischer Systeme bei der Unterstützung schülerzentrierter, experimenteller Lernformen sind zu nutzen. Das kritische Vergleichen von Eingaben und Ausgaben bei verschiedenen Programmen und Geräten bezüglich der Problemstellung kann zum Entwickeln eines problem- und softwareadäquaten Analysierens, Formulierens und Auswertens beitragen.“ (BMUKK 2000).*

Im Schuljahr 2018/2019 wurde flächendeckend *Digitale Grundbildung* in der Sekundarstufe 1 eingeführt, welches als eigenes Fach, aber auch in andere Fächer integriert unterrichtet werden kann. Der Lehrstoff umfasst unter anderem den Umgang mit Betriebssystemen und Standard-Anwendungen wie einem Tabellenkalkulationsprogramm sowie das Arbeiten mit Algorithmen und die Nutzung von Programmiersprachen (vgl. BMBWF 2018). In der Sekundarstufe 2 wird Lernen mit technologischer Unterstützung im Mathematikunterricht verstärkt forciert und ein sinnvoller Einsatz technologischer Hilfsmittel gefordert. Diese sollten in folgenden Bereichen zum Einsatz kommen:

> *„zur Darstellung von Funktionen, Kurven und anderen geometrischen Objekten, zum symbolischen Umformen von Termen und Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, zur Ermittlung von Ableitungs- und Stammfunktionen, zur Integration sowie zur Unterstützung bei Methoden und Verfahren in der Stochastik.“ (BMBWF 2018).*

Von der Lehrperson wird hierbei gefordert, einen sachgerechten und sinnvollen Einsatz technologischer Hilfsmittel sicherzustellen. Der Umfang wird dabei der Lehrperson überlassen:

> *„Die minimale Realisierung besteht im Einsatz entsprechender Hilfsmittel beim Lösen von Aufgaben und dem gelegentlichen Einsatz als didaktisches Werkzeug beim Erarbeiten neuer Inhalte. Die maximale Realisierung ist der sinnvolle*

Einsatz derartiger Technologien als Werkzeug beim Modellieren, Visualisieren und Experimentieren.“ (BMBWF 2018)

An höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten nimmt Technologieeinsatz einen noch höheren Stellenwert ein, im Hinblick auf spätere berufliche Anforderungen ist Werkzeugkompetenz integraler Bestandteil des Unterrichtsfaches *Angewandte Mathematik* (vgl. BMUKK 2009). *Operieren und Technologieeinsatz* stellt eine der vier Handlungsdimensionen dar, die im Unterricht vermittelt werden sollen. Auch kann hier die Nutzung einer Software wie MathCad oder Mathematica obligatorisch sein.

Den hohen Stellenwert von Technologien im Mathematikunterricht zeigt auch ein Blick in österreichische Schulbücher, in welchen die Umsetzung mit Technologien erklärt wird sowie Aufgaben formuliert werden, welche mit Technologieeinsatz gelöst werden sollen.

Der Erwerb technologischer Kompetenzen im Rahmen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik

Im Hinblick auf die bestehenden und auch kommenden Herausforderungen bezüglich Einsatz von Technologien an Schulen sollten Lehramtsstudierende im Rahmen ihrer universitären Ausbildung adäquat vorbereitet werden. Genauer wird im Curriculum der Universität Innsbruck gefordert, dass Absolventinnen und Absolventen des Bachelorstudiums Lehramt Sekundarstufe (Allgemeinbildung) mit Unterrichtsfach Mathematik *„im Einsatz geeigneter technischer Hilfsmittel erfahren sind und insbesondere einige Algorithmen implementieren können“* sowie „*Lerntechnologien im Unterricht sinnvoll einsetzen können*“. Während der letzte Punkt Inhalt von (Fach-)Didaktik-Veranstaltungen in höheren Semestern ist, wird der Erwerb von Technologiekompetenz in zwei Veranstaltungen realisiert, *Mathematische Software 1 und 2*. Diese beiden Proseminare haben einen Umfang von jeweils 2 Semesterwochenstunden und werden mit 2 bzw. 2.5 ECTS-Punkten verrechnet. Der Besuch der beiden Veranstaltungen ist obligatorisch und wird für das zweite und dritte Fachsemester empfohlen. Die Inhalte der beiden Veranstaltungen sind:

- Erarbeiten, Verfassen, formales Gestalten und Präsentieren mathematischer Inhalte;
- Umgang mit mathematischer Textverarbeitung;
- Verwendung eines CAS zur Lösung mathematischer Inhalte (numerisches und symbolisches Rechnen, Visualisierung etc.);
- Implementieren einfacher Algorithmen;
- grundlegende Fertigkeiten im Umgang mit einer ausgewählten Programmiersprache.

Die technologischen Fertigkeiten sollten hierbei vernetzt mit den Inhalten des Moduls *Lineare Algebra* sowie *Analysis 1* vermittelt werden.

Die Durchführung der Proseminare erfolgt in Zusammenarbeit mit Lehrkräften der Pädagogischen Hochschule Tirol. Die Proseminare finden in Rechnerräumen in Parallelgruppen mit jeweils maximal 25 Teilnehmenden statt, es handelt sich um eine prüfungsimmanente Veranstaltung mit Anwesenheitspflicht. Als Textverarbeitungsprogramm wurde LaTeX ausgewählt. Bezüglich CAS fiel die Wahl auf die kostenfreie Software maxima mit graphischer Oberfläche wxmaxima. Im Hinblick auf das anschließende Modul *Stochastik* wird als Programmiersprache R verwendet, wobei manche Algorithmen aber auch im CAS umgesetzt werden. Verstärkt wird den Studierenden GeoGebra nahegebracht, welches an vielen österreichischen Schulen zum Einsatz kommt, als dynamische Geometriesoftware zum Präsentieren mathematischer Inhalte gut geeignet ist, über eine CAS- und eine TK-Erweiterung verfügt und somit als Multirepräsentationswerkzeug flexibel einsetzbar ist. Das Ziel der Veranstaltungen besteht darin, ein Grundverständnis für mathematiknahe Technologien zu vermitteln, sodass im späteren Berufsleben Problemstellungen eigenständig gelöst, eigene (dynamische) Arbeitsblätter erstellt sowie neue Technologien selbstständig bzw. mit geeigneten Fortbildungsmaßnahmen schnell erarbeitet werden können, vgl. auch Heintz (2017).

Begleitend zu den Proseminaren wird ein Skriptum gereicht. In diesem wird die Funktionsweise der verwendeten Computerprogramme kurz erläutert, die wichtigsten Befehle aufgelistet und in kleinen Beispielen deren Verwendung demonstriert. Des Weiteren wird auch ein kurzer Einblick in das numerische Rechnen gegeben, genauer wird die Rechnerarithmetik erläutert, Fehlerfortpflanzung und Stellenauslöschung diskutiert sowie Kriterien an einen numerischen Algorithmus aufgezeigt. In jeder Proseminareinheit erarbeiten nach einem kurzen Theorie-Input die Studierenden selbstständig mit Hilfestellung der Lehrperson Präsenz-aufgaben. Daneben werden jede Woche auch Hausübungen gestellt, welche die Studierenden eigenständig zuhause bearbeiten sollen. Die bearbeiteten Aufgaben sind von den Studierenden in einer Lernplattform hochzuladen. Die Bewertung der Studienleistung des Proseminars erfolgt anhand der Bewertung der abgegebenen Aufgaben sowie der Punkte in der Klausur, welche zu Ende des Proseminars geschrieben wird.

Problematik der Aufgabenstellung

Aufgaben nehmen im Mathematikunterricht einen sehr hohen Stellenwert ein. Sie sind „*das wichtigste Werkzeug, das den Mathematiklehrkräften zur Verfügung steht*“ (Bruder 2006). In Leuders (2015) wird die Bedeutung wie folgt formuliert:

> *„Eine (Mathematik)aufgabe umreißt eine (mathematikhaltige) Situation, die Lernende zur (mathematischen) Auseinandersetzung mit dieser Situation anregt.“.*

Die Wahl der Aufgaben beeinflusst in hohem Maß die Qualität des Unterrichts. Auch im Informatikunterricht ist die Aufgabenkultur sehr ausgeprägt (vgl. Brichzin 2014). Die Proseminare „Mathematische Software 1 und 2“ werden sehr aufgabenzentriert ausgelegt, denn nur bei eigenständigem Arbeiten der Teilnehmenden am PC können die kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten im Umgang mit mathematiknahen Techno-logien erworben und ausgebaut werden. Die Wahl der Aufgaben ist daher das entscheidende Kriterium für den Kompetenzaufbau und ausschlag-gebend für den Erfolg und die Motivation der Studierenden. Während Aufgaben zum Erlernen eines Textverarbeitungsprogrammes recht kanonisch sind, ist die Wahl geeigneter Aufgaben für das Arbeiten mit einem CAS, DGS oder einer Programmiersprache diffiziler. Viele Aufgaben greifen Inhalte aus den Fachvorlesungen Lineare Algebra und Analysis auf. Beispielsweise wird der euklidische Algorithmus in einer Programmier-sprache implementiert oder das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren mit einem CAS umgesetzt. In anderen Aufgaben wird das Newton-Verfahren mit GeoGebra dargestellt und in einer Programmiersprache umgesetzt. Um den Stellenwert mathematiknaher Technologien auch im schulischen Bereich zu unterstreichen, werden teilweise auch Aufgaben aus Schulbüchern verwendet, z.B. Aufgaben zum Lösen linearer Gleichungssysteme mittels Technologieeinsatz. Auch kann mit Aufgaben die Verwendung von DGS zur Förderung entdeckenden Lernens aufgezeigt werden, als Beispiel können hier die Eulersche Gerade oder die Exploration der Bedeutung von Parametern einer quadratischen Funktion mittels Schiebereglern genannt werden. In einigen Aufgaben wird auch die Problematik von numerischen Rechnungen thematisiert.

Offene Fragestellung...

Bei jeder Aufgabe ist die Frage zu klären, wie diese formuliert werden sollte. So können beispielsweise Programmieraufgaben recht offen formuliert werden:

> *Schreiben Sie eine Funktion in R, welcher eine Liste übergeben wird. In der Funktion soll die Anzahl negativer Einträge der Liste ermittelt und diese Zahl zurückgegeben werden.*

Aber auch Aufgaben zum Einsatz dynamischer Geometriesoftware können sehr frei sein:

> *Veranschaulichen Sie die Bedeutung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung mit GeoGebra.*

Offene Fragestellungen bieten viele Vorteile. So sind Studierende gezwungen, sich mit den fachlichen Inhalten auseinanderzusetzen und sich zu überlegen, wie eine gute Darstellung aussehen könnte, welche Werkzeuge, Befehle bzw. Kontrollstrukturen verwendet und in welcher Reihenfolge die Einzelschritte ausgeführt werden sollten. Dies fordert in hohem Maß die Problemlösefähigkeit der Studierenden. Viele Aufgaben sind auch vielfältig lösbar, durch offene Fragestellungen wird die Kreativität der Studierenden gefördert. Es können mehrere Vorgehensweisen erprobt und unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten ausprobiert werden. Durch den Weg einer nicht zielführenden Richtung erfährt die/der Studierende die Grenzen und Möglichkeiten einer Technologie. Im Prozess der Lösungsfindung wird vernetztes flexibles und nachhaltiges Wissen erworben. Offene Aufgabenformate bringen aber auch Nachteile mit sich. Studierende sehen sich überfordert, was mangelndes fachliches Verständnis oder Schwierigkeit bei der technischen Umsetzung als Ursache haben kann. Intensive Betreuung und Hilfestellungen sind oftmals nötig. Die Überforderung birgt auch die Gefahr eines demotivierenden Effekts. Teilweise wird auf unerlaubte Hilfsmittel zugegriffen. So werden Vorlagen im Internet gesucht und diese unreflektiert übernommen, oder die Lösungen von anderen Studierenden verwendet. Die Endresultate einer offenen Aufgabe variieren stark. Abgegebene Aufgaben weisen teilweise inhaltliche Fehler auf, trotz Verwendung einer dynamischen Geometriesoftware sind die Programme statisch, es fehlen Erklärungen und angemessene Beschriftungen, Hilfskonstruktionen werden nicht ausgeblendet und trüben das Gesamtbild, etc. Eine klare Bewertung einer offenen Aufgabe ist auch etwas problematisch.

... oder besser genaue Anleitung

Jede Aufgabe kann auch sehr geschlossen formuliert werden, es kann eine genaue Schritt-für-Schritt-Anleitung bzw. ein Konstruktionsprotokoll angegeben werden. Der Programmablaufplan kann als Text, Pseudocode oder schematisch in Form eines Flussdiagramms oder Struktogramms dargestellt werden. Die Anleitungen sind in diesen Fällen oft recht lang. Durch eine genaue Anleitung wird ein schneller Einstieg ermöglicht. Der Lern- und Kompetenzzuwachs erfolgt gesteuert in kleinen Dosen, neue Befehle oder Werkzeuge können gezielt eingeführt werden. Die Aufgaben sind effizient korrigierbar und ermöglichen eine klare faire Bewertung. Das Endprodukt kann als Beispiel für ähnliche Problemstellungen dienen. Die Angabe einer genauen Anleitung weist aber auch einige Nachteile auf. Das Abarbeiten einer Anleitung bewirkt ein recht mechanisches Arbeiten, Kreativität und eigene abweichende Lösungen sind unerwünscht. Die einzelnen Punkte bauen oft aufeinander auf, können Zwischenschritte nicht umgesetzt werden, kann die restliche Aufgabe nicht mehr bearbeitet werden. Problemlösefähigkeit und Auseinandersetzen mit den fachlichen Inhalten ist nicht gefordert. Algorithmisches und schematisches Arbeiten wird verstärkt, Verständnis und Erwerb flexiblen Wissens wird beschränkt.

Erfahrungen im Unterrichten mathematiknaher Technologien

Das Unterrichten von Technologien ist herausfordernd. Ein großes Problem ist die Heterogenität in der Studierendengruppe. Die Studierenden unterscheiden sich stark in ihrem Vorwissen und in ihrer Bereitschaft, sich mit dem Computer und mathematiknahen Technologien auseinanderzusetzen. Das Bearbeiten von Programmieraufgaben bereitet in manchen Fällen enorme Probleme, manche Studierende haben sogar eine kleine Aversion gegenüber Programmieraufgaben. An den meisten Stellen ist aber größere Motivation zu beobachten, es werden Fragen gestellt, die weit über die behandelten Inhalte hinausgehen und von großem Interesse an der Materie zeugen. Das Erarbeiten von Aufgaben erfolgt oft in Zusammenarbeit mit Kommilitonen, was durchaus begrüßenswert ist, aber auch Gefahren für schwächere Studierende birgt. Das Unterrichten mathematischer Technologien hat einige Besonderheiten: die Studierenden arbeiten selbstverantwortlich am Rechner, die Handlungsorientierung steht stärker im Vordergrund. Die/der Studierende erhält vom Computer meist ein unmittelbares Feedback, die Lehrperson begleitet unterstützend den eher selbstzentrierten Prozess. Wie oben ausgeführt wurde, ist die Formulierung der Aufgaben kritisch. Erfahrungsgemäß ist eine Mischung angebracht, mit Staffelung der Schwierigkeit im Fortschritt des Semesters. Bekannte Konstruktionsschritte werden im Lauf des Semesters in der Anleitung recht kurz formuliert, bzw. nur angegeben, welche Bausteine beispielsweise das GeoGebra-Applet besitzen sollte. Umfangreichere Programmieraufgaben werden im Pseudocode angegeben, bei kleineren Programmen wird hierauf bewusst verzichtet. In diesem Sinne werden auch in der Klausur sowohl Aufgaben mit genauen Anleitungen als auch offene Fragen formuliert. Der Erwerb bzw. Ausbau von Problemlösekompetenz ist zentrales Ziel des Studiums und sollte dementsprechend in allen Veranstaltungen forciert werden. Durch entsprechende Aufgabenstellung erfolgt gerechte Binnendifferenzierung und wird eine gestaffelte Bewertung ermöglicht. Der frühe Erwerb technologischer Kompetenzen bietet viele Vorteile. In Folgeveranstaltungen wie den Fachvorlesungen *Algebra und diskrete Mathematik*, *Stochastik*, *Geometrie* oder *Analysis 2* kann auf das Wissen im Umgang mit Technologien zurückgegriffen werden. In Veranstaltungen der (Fach-)Didaktik kann der Einsatz digitaler Werkzeuge und Technologien im

Unterricht behandelt werden, ohne auf Schwierigkeiten im Umgang mit entsprechender Technologie zu stoßen.

Abschließende Bemerkungen

Das Interesse an mathematischen Technologien und digitalen Werkzeugen ist individuell unterschiedlich ausgeprägt und hängt von der Computeraffinität des Einzelnen ab. Den persönlichen Vorlieben entsprechend wird das Ausmaß der Nutzung mathematiknaher Technologien im Unterricht unterschiedlich ausgeprägt sein und sollte zum individuellen Stil passen. Mathematiknahe Technologien bieten eine hervorragende Plattform, um kreativ, explorativ und entdeckend Mathematik zu betreiben. Eine solide Basis im Umgang mit mathematiknahen Technologien ist für universitäre Folgeveranstaltungen und das spätere Berufsleben gewinnbringend.

Literatur

Österreichische Gesellschaft für Marketing OGM (2018). „Wie fit sind Österreichs Schulen für die digitale Welt". Umfrage im Auftrag der Innovationsstiftung für Bildung (11.09.2018). https://innovationsstiftung-bildung.at/fileadmin/Dokumente/innovationsstiftung.at/Dokumente/180911_PK_DigitalisierungSchule_PRAESENTATION_FINAL.pdf

Hattie, J. (2008). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. Verlag Routledge.

Scharnagl, S., Evanschitzky, P., Streb, J., Spitzer, M., & Hille, K. (2014). Sixth graders benefit from educational software when learning about fractions: A controlled classroom study. *Numeracy*, 7(1), 4.

Drijvers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). In *Selected regular lectures from the 12th international congress on mathematical education* (pp. 135-151). Springer, Cham.

Bundesministerium für Bildung und Forschung BMBF (2016). „Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft. Strategie des Bundesministeriums für Bildung und Forschung". https://www.bmbf.de/files/Bildungsoffensive_fuer_die_digitale_Wissensgesellschaft.pdf

Barzel, B. (2012). *Computeralgebra im Mathematikunterricht: ein Mehrwert – aber wann?* Waxmann Verlag.

Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur BMUKK (2000). Lehrplan Mathematik Unterstufe. https://bildung.bmbwf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung BMBWF. (2018). Lehrplan Digitale Grundbildung. https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2018_II_71/BGBLA_2018_II_71.html

BMBWF. (2018). Lehrplan AHS Mathematik Oberstufe. https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2018_II_216/BGBLA_2018_II_216.html

BMUKK. (2009). Angewandte Mathematik BHS. https://www.bildungsstandards.berufsbildendeschulen.at/sites/default/files/broschuere/BBS-Bildungsstandards-Broschuere-Angewandte-Mathematik-BHS.pdf

Heintz, G., Elschenbroich, H. J., Laakmann, H., Langlotz, H., Rüsing, M., Schacht, F., Schmidt, R., Tietz C. (2017): Werkzeugkompetenzen–Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben. Verlag K. Seeberger. *Neuss.*

Bruder, R. (2006). Erläuterungen zu Modul 1 - Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im Mathematikunterricht. *http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/module/modul_1weiterentwicklung_der_aufgabenkultur.html*

Leuders, T. (2015). Aufgaben in Forschung und Praxis. In *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 435-460). Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg.

Brichzin, P., Humbert, L., & Puhlmann, H. (2014). Aufgabenkultur im Schulfach Informatik. *LOG IN: Vol. 34, No. 1*.

letzter Zugriff auf alle Internetquellen am 03.02.2019.

R-Exams mit WebApp
Technische Aspekte und Möglichkeiten zu unmittelbarem Feedback

Florian Stampfer

Einleitung

Die derzeit angestrebte Digitalisierung im Bildungsbereich wirft mehrere Fragen auf. Eine davon betrifft die Auswahl und Identifikation passender Aufgabenformate, die für computerbasiertes Lernen oder Testen geeignet sind (vgl. z.B. Leuders, 2015, p. 453). Damit einhergehend stellt sich unweigerlich auch die Frage nach der technischen Umsetzung, insbesondere der Speicherung der Aufgaben, mit Blick auf zukünftig technische Entwicklungen. Das IMS Global Learning Consortium hat seit 2000 sukzessive das Format IMS Question & Test Interoperability (QTI) entwickelt, das den Austausch von Aufgaben für Online-Medien erleichtern soll. Zeileis, Umlauf, & Leisch (2014) stellen ein noch abstrakteres und dadurch flexibleres Format vor, das einen in der Statistiksoftware *R* realisierten Export der Aufgaben sowohl in die QTI-Formate als auch in viele Print- und Web-Formate bereit stellt. In den letzten Jahren wurde an der Universität Innsbruck eine zu diesem Format passende WebApp entwickelt, die eine Bearbeitung der Aufgaben am PC, Notebook, Tablet, Smartphone etc. zulässt. Darüber hinaus erlaubt die WebApp eine rasche und unkomplizierte Datenerhebung, die selbst wieder in *R* (automatisiert) ausgewertet werden kann und folglich eine unmittelbare Rückmeldung an die Testpersonen ermöglicht.

Im zweiten Abschnitt wird zunächst das *R*-Paket *exams* vorgestellt, das auf das erwähnte abstrakte (Aufgaben-)Format zurückgreift. Im dritten Abschnitt werden die Funktionsweise und die technischen Aspekte der WebApp vorgestellt. Der vierte Abschnitt gibt Einblick in eine mit der WebApp umgesetzte Erhebung des *Natural Number bias* bei Studierenden in Westösterreich. Der Artikel endet mit einem kurzen Ausblick.

R*-Paket *exams

Die freie Programmiersprache *R* (R Core Team, 2018) hat sich in den letzten zwei Jahrzehnten zusehends als Standardsprache für statistische Problemstellungen etabliert (vgl. TIOBE Software, 2018). Durch viele verfügbare Pakete kann der Funktionsumfang von *R* stark erweitert werden. Im Folgenden wird das von einer Gruppe rund um Achim Zeileis entwickelte *R*-Pakete *exams* vorgestellt (Grün & Zeileis, 2009; Zeileis u. a., 2014).

Zeileis u.a. waren im Studienjahr 2006/07 mit einer Überarbeitung der Lehrveranstaltungsformate konfrontiert. Ein Ziel war es, dass die Organisation der Lehrveranstaltungen effizient und die Abhaltung dieser in parallelen Gruppen vergleichbar abläuft. Des Weiteren entschied man sich für eine technologieunterstützte Abwicklung der Übungsgruppen und entwickelte dazu das *R*-Paket *exams*, das den Rahmen für insbesondere drei Anforderungen liefern sollte (Grün & Zeileis, 2009, p. 1):

- *Skalierbare Prüfungen*: Automatische Generierung einer großen Anzahl verschiedener Prüfungen, um jedem/r Studierenden einen individuellen Test anbieten zu können
- *Materialien zum Selbststudium*: Sammlungen von Übungen und Lösungen aus demselben Pool von Beispielen
- *Gemeinsame Entwicklung*: Entwicklung und Pflege eines großen Pools von Übungen in einem plattformübergreifenden Umfeld durch mehrere Autorinnen und Autoren

Dazu war es zunächst notwendig ein möglich abstraktes Aufgabenformat zu definieren, das einer weiteren Verarbeitung dienlich ist. In der ersten Version entschied man sich für eine *LaTeX*-basierte Variante in Form sogenannter *Sweave*-Dateien (Endung meist *Rnw* ursprünglich für **Rn**o**w**eb, vgl. Therneau, 2013). In solchen Dateien wird *R*-Code mit *LaTeX*-Befehlen verknüpft. Konkret wird während der Laufzeit des *R*-Programms die gewählten *R*-Ausgaben mit den *LaTeX*-Befehlen zu einer *LaTeX*-Datei zusammengefügt. In späteren Versionen wurde zusätzlich eine *markdown*-basierte Variante in Form sogenannter *R markdown*-Dateien (Endung *Rmd* steht für **R** **m**ark**d**own) berücksichtigt. Dabei wird während der Laufzeit des *R*-Programms ein *markdown*-Code erstellt, der dann weiterverarbeitet werden kann.

Der grundlegende Aufbau der *Rnw*- und *Rmd*-Dateien für das Aufgabenformat ist gleich: Neben optionalen *R*-Code-Blöcken (umrahmt von <<>>= und @ in *Rnw* bzw. ```{} und ``` in *Rmd*) oder als Inline-Code (\Sexpr{…} in *Rnw* bzw. `r …` in *Rmd*) wird ein Abschnitt *question* benötigt, gefolgt von einem optionalen Abschnitt *solution*, gefolgt von einem notwendigen Abschnitt *meta-information*. Zur Veranschaulichung folgt jeweils der schematische Aufbau für beide Dateiformate:

Aufbau einer Aufgabe als *Rnw*-Datei:

```
<<>>=
...
@
\begin{question}
...
\end{question}

\begin{solution}
...
\end{solution}

%% meta-information
...
```

Aufbau einer Aufgabe als *Rmd*-Datei:

````
```{r}
...
```
question
========
...

solution
========
...

meta-information
================
...
````

Die *R*-Code-Blöcke können unter anderem zur Datengenerierung, der Erstellung und zufälligen Auswahl von Textpassagen, aber auch zur Erstellung von Grafiken und Tabellen verwendet werden. Im nachstehenden Beispiel werden im ersten *R*-Code-Block aus vier Zahlen zwei Brüche erstellt, deren Darstellung in *LaTeX* realisiert, eine Textpassage aneinandergereiht, drei Antwortmöglichkeiten angegeben, eine Liste mit der korrekten Antwort berechnet und eine Erklärung für diese erstellt.

Der Abschnitt *question* kann einen Angabetext, eine Frage, mögliche Antworten, Bilder etc. enthalten. Im nachstehenden Beispiel wird mittels Inline-Code die erstellte Textpassage ausgegeben und in einem *R*-Code-Block eine Liste der möglichen Antworten erstellt. Es wäre auch möglich gewesen direkt den Text und die Aufzählung im Klartext hinzuschreiben.

Der optionale Abschnitt *solution* kann die Lösung und eine Erklärung enthalten. Im nachstehenden Beispiel wird mittels Inline-Code die erstellte Erklärung ausgegeben.

Der Abschnitt *meta-information* enthält zumindest den Antworttyp und (falls vorhanden) eine Lösung. Das aktuelle *exams* Paket stellt vier Antworttype zur Verfügung:

4. *num* für eine numerische Antwort,
5. *schoice* für eine single-choice Aufgabe (genau eine Antwortmöglichkeit ist richtig),
6. *mchoice* für eine multiple-choice Aufgabe (keine Antwortmöglichkeit ist richtig bis alle Antwortmöglichkeiten sind richtig),
7. *string* für Freitextantworten und
8. ein Kombinationstyp *cloze* (vereint mehrere der oben genannten Antworttypen in einer Aufgabe).

Im nachstehenden Beispiel wurde der Antworttyp *schoice* ausgewählt und mittels Inline-Code wird die Lösung erstellt.

````
```{r,echo=FALSE}
## DATA GENERATION
z <- c(4,9,2,7)
x = z[[1]]/z[[2]]
y = z[[3]]/z[[4]]
zahl1=paste0("$\\frac{",z[1],"}{",z[2],"}$")
zahl2=paste0("$\\frac{",z[3],"}{",z[4],"}$")
TXT= paste0("Welche Zahl ist größer? ",zahl1," oder ", zahl2)
questions= c(paste0(zahl1," ist größer"),paste0(zahl2," ist
größer"),"beide gleich groß")
solutions=c(x>y,x<y,x==y)
explanation=paste0(questions[solutions],", da $",z[1],"\\
cdot",z[4],"=",z[1]*z[4],
c(">","<","=")[solutions],z[2]*z[3],"=",z[2],"\\cdot",z[3],"$ ist.")
```

Question
========
`r TXT`
```{r, echo=FALSE,results="asis"}
answerlist(questions,markup="markdown")
```

Solution
========
`r explanation`

Meta-information
================
extype: schoice
exsolution: `r mchoice2string(solutions)`
exname: size
````

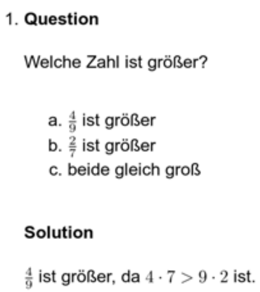
Das Potential einer zufälligen Variation (Randomisierung) der Aufgabe wurde beim vorgestellten Beispiel bisher noch nicht berücksichtigt. Am obigen Beispiel lässt sich jene sehr leicht aufzeigen: Die alleinige Abänderung

~~*z <- c(4,9,2,7)*~~ → *sample(1:20,4,replace=TRUE)*

ermöglicht es bei jeder Laufzeit des *R*-Programms vier neue zufällige Zahlen zu generieren. Die Lösung und die Erklärung werden entsprechend erstellt.

Eine große Stärke des soeben vorgestellten abstrakten Aufgabenformates liegt darin, dass von Beginn an ein Export in viele unterschiedliche Print- und Web-Format möglich ist. Konkret steht derzeit ein Export einer Aufgabe in die Formate bzw. Plattformen bzw. Standards *arsnova*, *blackboard*, *html*, *moodle*, *openolat*, *pandoc* (z.B. *docx*), *pdf*, *qti12*, *qti21* zur Verfügung.

Das *R*-Paket *exams* und insbesondere das abstrakte Aufgabenformat bieten eine technisch einfache Umgebung zur Erstellung, Verwaltung und (anschlussfähigen) Speicherung von Aufgaben. Es lassen sich aus einem Aufgabenpool rasch Aufgabenblätter für mehrere Gruppen oder Materialien zum Selbststudium erstellen. Weitere Details zum *R*-Paket *exams* und zu aktuellen Weiterentwicklungen sind unter www.r-exams.org abrufbar.



1. **Question**

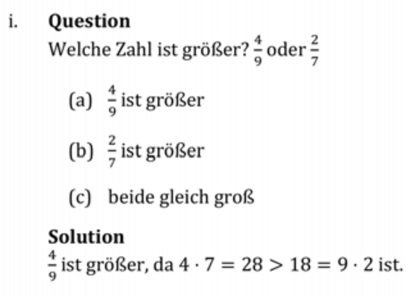
Welche Zahl ist größer?

a. $\frac{4}{9}$ ist größer
b. $\frac{2}{7}$ ist größer
c. beide gleich groß

Solution

$\frac{4}{9}$ ist größer, da $4 \cdot 7 > 9 \cdot 2$ ist.

Abbildung 1: Ausgabe des Beispielcodes im *html*-Format

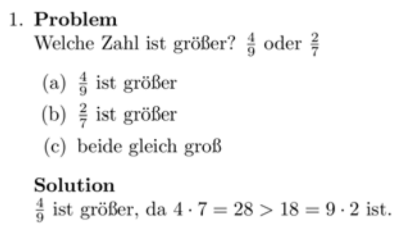


i. **Question**
Welche Zahl ist größer? $\frac{4}{9}$ oder $\frac{2}{7}$

(a) $\frac{4}{9}$ ist größer
(b) $\frac{2}{7}$ ist größer
(c) beide gleich groß

Solution
$\frac{4}{9}$ ist größer, da $4 \cdot 7 = 28 > 18 = 9 \cdot 2$ ist.

Abbildung 2: Ausgabe des Bespielcodes im docx-Format



1. **Problem**
Welche Zahl ist größer? $\frac{4}{9}$ oder $\frac{2}{7}$

(a) $\frac{4}{9}$ ist größer
(b) $\frac{2}{7}$ ist größer
(c) beide gleich groß

Solution
$\frac{4}{9}$ ist größer, da $4 \cdot 7 = 28 > 18 = 9 \cdot 2$ ist.

Abbildung 3: Ausgabe des Bespielcodes im *pdf*-Format

Obwohl es mit *arsnova*, *blackboard*, *moodle* und *openolat* bereits *exams*-kompatible Plattformen gibt die Daten von Studierenden sammeln und einfache Rückmeldungen an die Studierenden erlauben, ist eine automatisierte Weiterverarbeitung der gesammelten Daten (in *R*) mit anschließender Rückmeldung an die Studierenden aktuell nicht möglich. Dies war ein Ausgangspunkt für die Entwicklung einer kompatiblen WebApp die einerseits zur einfachen und direkten Datenerhebung mit *exams*-Aufgaben eingesetzt werden kann und andererseits eine direkte Rückmeldung an Studierende und Lehrpersonen leistet, wobei beliebige („alles was *R* kann“) statistische Analysen vorgelagert werden können.

WebApp echo-app (vormals DimMA)

In den Jahren 2016/17 wurde an der Universität Innsbruck im Rahmen mehrerer kleinerer Projekte zunächst die WebApp *DimMA* (Akronym für **Dim**ensionale **M**athematik-**A**ufgaben) entwickelt mit dem Ziel, Erhebungen mit *exams*-Aufgaben in Eigenregie durchführen zu können. Diese wurde dann 2018 in *echo-app* umbenannt und um die Funktion der direkten Rückmeldung an Studierende und Lehrpersonen erweitert.

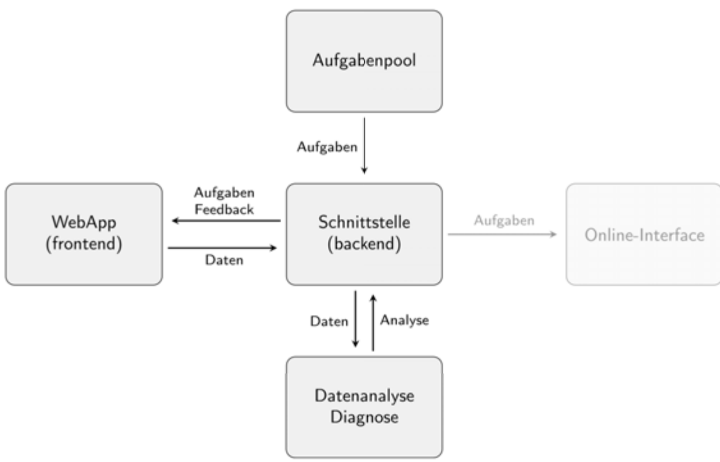


Abbildung 4: Schematischer Aufbau der Funktionsweise der WebApp (Quelle: Stampfer)

Funktional betrachtet, verarbeitet die WepApp als Eingabe eine oder mehrere *exams*-Aufgaben und liefert als Ausgabe einen *R*-Datensatz mit Angaben zu korrekter Beantwortung, Bearbeitungszeit und abgegebener Antworten. Dieser Datensatz dient dann als Eingabe eines Analyse-Scripts in *R*. Aus diesen Resultaten kann anschließend ein Feedback (derzeit in Form einer html-Seite) für jede/n Studierenden und für die Lehrperson erstellt und über die WebApp übermittelt werden. Ein schematischer Aufbau der Funktionsweise ist in Abbildung 4 zu sehen (ein Online-Interface zur Zusammenstellung von Aufgaben aus dem Aufgabenpool ist angedacht aber noch nicht realisiert).

Abbildung 5 zeigt die gesamte Abfolge von einer *exams*-Aufgabe bis hin zur Bearbeitung der Aufgabe durch Studierende.

Abbildung 5: Schematische Abfolge von einer *exams*-Aufgabe bis hin zur Bearbeitung der Aufgabe durch Studierende (Quelle: Stampfer)

Feldtestung der WebApp: Erhebung des Natural Number Bias

Im Frühjahr 2017 bot sich die Gelegenheit für eine erste Feldtestung der WebApp. Im Verbund LehrerInnenbildung West (Vorarlberg und Tirol) wurden die Studierenden im Lehramtsstudium Primarstufe (im Folgenden Primarstufenstudierende genannt) hinsichtlich des sogenannten Natural Number Bias untersucht. Hierbei handelt es sich um die fehlerhafte Anwendung von Konzepten zu natürlichen Zahlen im Kontext rationaler Zahlen (vgl. Van Hoof, Verschaffel, & Van Dooren, 2015).

Insgesamt behandelten 318 Primarstufenstudierende (32 davon Männer) in durchschnittlich 29 Minuten 83 Aufgaben aus dem *Rational Number Sense Test* (entwickelt und validiert von Van Hoof u.a., 2015) und fünf Fragen zu demographische Daten. Neben der Korrektheit der 83 Antworten wurden die Bearbeitungszeiten und alle Eingaben aufgezeichnet. Die Studierenden erhielten nach Abschluss des Fragensets eine Rückmeldung über die korrekt gelösten Aufgaben (die Feedbackfunktion war damals noch nicht verfügbar).

Unter Verwendung der Korrektheit und der Bearbeitungszeiten aller 83 Elemente konnte mittels Clusteranalyse für gemischte Daten drei Profile identifiziert werden. Die Erhebung zeigt deutlich, dass viele Primarstufenstudierende aus ihrer Schulausbildung gravierende Fehlkonzepte, insbesondere zu Bruchzahlen, mitschleppen, die es in einer entsprechenden Lehrveranstaltung zu korrigieren gilt. Die identifizierten Profile gaben nun Anlass sich mit profilspezifischen Interventionen in den Fachlehrveranstaltungen für die Primarstufenstudierenden zu beschäftigen (für weitere Details zur Studie siehe Stampfer & Hell, 2018).

Die WebApp erlaubt in diesem Kontext die unmittelbare Klassifikation der Studierenden (zu vorher ermittelten Trainingsdaten) und damit die Möglichkeit Lernmaterialien für die einzelnen Profile anbieten zu können.

Ausblick

Das diskutierte *R*-Paket *exams* und die WebApp bieten sich sowohl für die Lehre als auch für die fachdidaktische Forschung als digitale Werkzeuge an:

Für die Lehre ist eine unkomplizierte profilabhängige Schwerpunktsetzung möglich. Dies werden die nächsten Schritte im Rahmen der Erhebung des Natural Number Bias bei Primarstufenstudierenden aber auch bei Schülerinnen und Schülern sein. Gleichzeitig kann das Abschneiden bei einem Aufgabenset als persönlicher Referenzwert und Aktivierung für eine Lehrveranstaltung herangezogen werden. Des Weiteren erhält die Lehrperson in Echtzeit Rückmeldung über den aktuellen Lernstand der Schülerinnen und Schüler. Zudem erlaubt das abstrakte (Aufgaben-)Format im *exams*-Paket eine zukunftssichere Speicherung der Aufgaben mit vielfältigen Exportvarianten.

Für die fachdidaktische Forschung bietet sich die Möglichkeit, Datenerhebung und (automatisierte) Datenanalyse zu verknüpfen, um z.B. profilspezifische Entwicklungen im Rahmen einer Intervention zu untersuchen.

Literatur

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2003). Intrinsic Motivation Inventory (IMI).

Grimheden, M., & Törngren, M. (2005). What is embedded systems and how should it be taught?—results from a didactic analysis. *ACM Transactions on Embedded Computing Systems*, *4*(3), 633–651.

Grün, B., & Zeileis, A. (2009). Automatic Generation of Exams in R. *Journal of Statistical Software*, *29*(10), 1–14.

Jamieson, P. (2011). Arduino for Teaching Embedded Systems. Are Computer Scientists and Engineering Educators Missing the Boat? In H. R. Arabnia, V. A. Clincy, & L. Deligiannidis (Hrsg.), *Proceedings of FECS '11*. Las Vegas, U S A.

Leuders, T. (2015). Aufgaben in Forschung und Praxis. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 435–460). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

R Core Team. (2018). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. www.R-project.org/

Stampfer, F., & Hell, T. (2018). Teufelskreis Natural Number Bias - Primarstufenstudierende Im Fokus. In *Beiträge Zum Mathematikunterricht 2018* (S. 1727–1730). Münster: WTM-Verlag.

Therneau, T. (2013). *Noweb: Noweb System for R*. https://CRAN.R-project.org/package=noweb

TIOBE Software. (2018). Tiobe Index for December 2018. Abgerufen von www.tiobe.com/index.php/content/paperinfo/tpci/index.html

Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: Characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(1), 39–56.

Wilde, M., Bätz, K., Kovaleva, A., & Urhahne, D. (2009). Überprüfung einer Kurzskala intrinsischer Motivation (KIM). *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, *15*, 31–45.

Zeileis, A., Umlauf, N., & Leisch, F. (2014). Flexible Generation of E-Learning Exams in R: Moodle Quizzes, OLAT Assessments, and Beyond. *Journal of Statistical Software*, *58*(1), 1–36.

Das Simulationsbeispiel eines Parabelzirkels. Einflüsse einer digitalen Simulation auf Sprache und Vorstellungen der Lernenden

Christian van Randenborgh

Ein Beispiel für eine digitale Simulation ist die hier vorgestellte Konstruktion eines Parabelzirkels mit Hilfe einer dynamischen Geometriesoftware (DGS). Nach einer kurzen Vorstellung des Parabelzirkels von Frans van Schooten (1615-1660) wird herausgearbeitet, welche Besonderheiten sich beim Mathematiklernen mit einer digitalen Simulation ergeben können. Dabei richtet sich der Fokus auf das Aufzeigen von Einflüssen einer solchen Simulation auf Sprache und Vorstellungen der Lernenden. Als zentrale Grundlagen zur Analyse der beobachteten Lernprozesse werden dabei die Ansätze der instrumentellen Genese (Rabardel, 2014), der semiotischen Vermittlung (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) und der Begriff des Ideenkonglomerats (van Randenborgh, 2018) angesehen.

Einleitung

Zur Erarbeitung oder Darstellung geometrischer Sachverhalte werden heute verstärkt dynamische Geometrieprogramme genutzt. Eine spezielle Möglichkeit dieser Programme ist es, eine Simulation von realen bzw. physikalischen Gegenständen zu erhalten. Diese kann dann von Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht benutzt und erkundet werden. Wählt man als Sozialform eine Gruppen- oder Partnerarbeit, dann müssen die Schülerinnen und Schüler dabei ihre Gedanken verbalisieren. Sie formulieren ihre Ideen etwa in Worten, Gesten oder Zeichnungen. Am Beispiel des Parabelzirkels wird herausgearbeitet, wie sich das Lernen mit einer digitalen Simulation vom Lernen mit realen Gegenständen unterscheidet. Unter Rückbezug auf die Ergebnisse einer empirischen Untersuchung (van Randenborgh, 2015) soll herausgestellt werden, welche Einflüsse digitaler Simulationen auf Sprache und mit ihr ausgedrückten Vorstellungen der Lernenden gefunden werden konnten.

Kurzvorstellung des Parabelzirkels

Abbildung 1 zeigt den Parabelzirkel von Frans van Schooten, wie er in dem 1646 erschienen Werk *De organica conicarum sectionum in plano descriptione* von ihm selbst gezeichnet wurde.

Eine dynamisierte Abbildung

In Abbildung 1 ist mehr als das bloße Gerät zu sehen. Es gibt zusätzliche Elemente.[6] Auffällig sind sicher sofort die Hände. Sie machen deutlich, an welchen Stellen der Parabelzirkel angefasst und bewegt werden sollte. Auf diese Weise wird die Abbildung ***dynamisiert***.

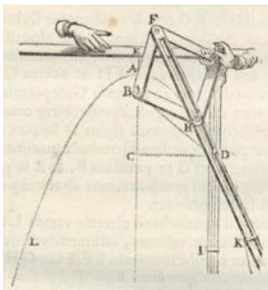


Abbildung 1: Parabelzirkel, van Schooten, 1646, S.74

Auch die Parabel ist punktweise eingezeichnet. Allerdings kann man bei der zu sehenden Einstellung und der durch die Hände angedeuteten Bewegung nur einen Teil des rechten Parabelastes erzeugen. Wenn der Stift (D) die Rautenecke H erreicht hat, kann nicht weiter gezeichnet werden. Um die gesamte abgebildete Parabel zu erzeugen, sind mehrere Umbauten erforderlich. Dabei lässt sich der Scheitelpunkt gar nicht mit dem Gerät zeichnen. Zu diesem und weiteren Details sei auf van Randenborgh (2018) verwiesen.

6 Vgl. auch van Randenborgh, 2012a; 2015, S.7ff.

Ein Holzmodell

Abbildung 1 ermöglicht durch seine „Dynamisierung“ und das Einzeichnen zusätzlicher Linien einen einfachen Zugang zu den wesentlichen Elementen der Bau- und Funktionsweise des Parabelzirkels. Dieses lässt sich an der Holzkonstruktion von van Randenborgh, die in Abbildung 2 zu sehen ist, so beschreiben: Um mit dem Parabelzirkel zu zeichnen, bewegt man G entlang der befestigten Schiene (Leitlinie). Auf diese Weise „verformt“ sich die Gelenkraute (GFBH) und der Stift (D) zeichnet eine Parabel. Zu beachten ist, dass der Stift den Schnittpunkt der Diagonalschiene (FH) und einer zur Leitschiene orthogonalen Schiene darstellt. Für die zugrundeliegende Mathematik des Geräts ist wichtig, dass es sich bei GFBH um eine Raute handelt. Denn die Diagonale ist damit die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{BG}$. Dieses bedeutet, dass alle Punkte auf ihr von B und G gleich weit entfernt sind. Da der Punkt D der Schnittpunk der Mittelsenkrechten und einer zur Leitschiene orthogonalen Schiene ist, handelt es sich bei $|\overline{DG}|$ um den *Abstand* zur Leitlinie.

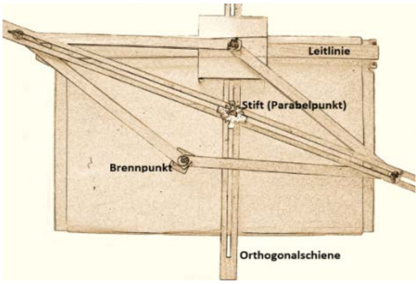


Abbildung 2: Parabelzirkel von van Randenborgh (2010)

Der in Abbildung 2 gezeigte Parabelzirkel unterscheidet sich in seiner Bauweise von dem Ausgangsmodell von van Schooten (Abb. 1). Bei diesem Modell (vom Autor konstruiert) kann sich der Stift (ohne Umbau) nur innerhalb der Raute bewegen. Damit man die beiden Äste der Parabel innerhalb der Raute zeichnen kann, ist die Orthogonalschiene bei G so befestigt, dass sie verschiebbar ist. Wird der Parabelzirkel so weit bewegt, dass er mit der Orthogonalschiene an B stößt, kann man diese weiter nach oben ziehen. Dadurch kann der Scheitelpunkt der Parabel und der andere

Ast so weit gezeichnet werden bis man an die jeweils gegenüberliegende Rautenecke (F bzw. H) gelangt.

Eine digitale Simulation

In Abbildung 3 ist die Konstruktion eines digitalen Parabelzirkels zu sehen. Im Vergleich zum realen Modell beruht er auf derselben mathematischen Idee, die technische Umsetzung bringt aber andere Möglichkeiten und Einschränkungen mit sich (s.u.). Es stellt sich daher die Frage, ob und wie Lernende zur verborgenen Mathematik des digitalen Modells gelangen und ob es spezifische Unterschiede zum Vorgehen der Lernenden beim Einsatz eines realen Modells gibt.

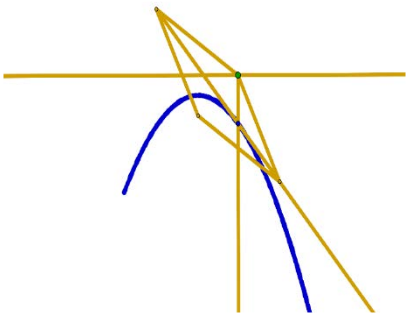


Abbildung 3: digitale Parabelzirkelsimulation (van Randenborgh)

Anders als bei dem realen Parabelzirkel lässt sich die digitale Konstruktion (Abb. 3) zunächst nur am Punkt G bewegen. Dieses stellt eine *Einschränkung* gegenüber dem realen Modell dar, welches sich an unterschiedlichen Stellen anfassen und bewegen lässt. Allerdings verweist die dynamisierte Abbildung genau auf eine derartige Bewegung und das reale Modell lässt sich so auch am besten bewegen. Es gibt auch einige *Erweiterungen*. So können mit dem digitalen Gerät viele Dinge leicht durchgeführt werden, die mit dem realen Modell nur schwer oder gar nicht realisierbar sind. Die physikalische Einschränkung, dass man beispielsweise mit dem realen Parabelzirkel ohne Umbau entweder nur inner- oder nur außerhalb der Gelenkraute zeichnen kann, ist mit der digitalen Simulation überwunden. Mit ihr sind sogar die Stellen, an der der Stift die entsprechenden Rautenecken trifft, die mit dem realen Modell überhaupt nicht zu zeichnen sind, darstellbar. Darüber hinaus sind weitere Erweiterungen und Möglichkeiten des digitalen Parabelzirkels umsetzbar. So können die Lernenden z.B. diese Veränderungsmöglichkeiten vornehmen:

- Es lassen sich zusätzliche Informationen und Dinge anzeigen, wie z.B. die Streckenlängen oder Winkelgrößen.
- Es lässt sich durch die beiden Rautenecken F und H eine Gerade legen.
- Es können die Spuren von anderen geometrischen Objekten angezeigt werden, wie z.B. die der Halbgeraden bzw. Geraden FH.
- Es lässt sich die Lage des Brennpunktes (B) oder der Leitlinie vielfältiger variieren.

Fazit: Unterschiedliche Ideen eines Parabelzirkels

Diese kurze Beschreibung ermöglicht es schon zu erkennen, dass *in der Bauweise unterschiedliche Ideen wiederzufinden* sind. Dieses sollte meines Erachtens auch durch die zusätzlichen Einzeichnungen in der dynamisierten Abbildung von van Schooten (Abb. 1) deutlich werden. Denn die Abbildung ermöglicht es dem Betrachter auf diese Art leichter, die ***Einsatzidee*** des Geräts, das Zeichnen von Parabeln, zu erkennen.

Die ***mechanische oder technische Idee*** ist die Idee, die bereits am bloßen Gerät am leichtesten zu sehen ist. Beispielsweise ist in dem Viereck GFBH eine *Gelenkraute* zu erkennen, bei der ihre geometrischen Eigenschaften selbst beim Bewegen erhalten bleiben. Auch die Orthogonalität von EG und GD ist schon in der dynamisierten Abbildung gut sichtbar. Unterstützt wird diese Wahrnehmung noch durch die Hilfslinien, da der rechte Winkel bei C gut erkennbar ist und damit CDGE deutlich als Rechteck erscheint.

Die zugrundeliegende ***mathematische Idee*** wird in Abbildung 4 visualisiert. Wie zu erkennen ist, befindet sich der Stift (Parabelpunkt D) auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{BG}$. Daher ist er gleich weit von B und von G entfernt. Der im dritten Bild markierte rechte Winkel zeigt an, dass es nicht nur um die Entfernung zu zwei Punkten geht, sondern vor allem um den Abstand zur Leitlinie. Denn der Punkt D liegt immer – konstruktionsbedingt

– auf der Orthogonalen zur Geraden GE. Dies zu erkennen, ist der entscheidende Schritt, um die Parabel als Menge aller Punkte, die zu einem festen Punkt (Brennpunkt B) und zu einer festen Geraden (Leitlinie GE) den gleichen Abstand haben, auffassen zu können.

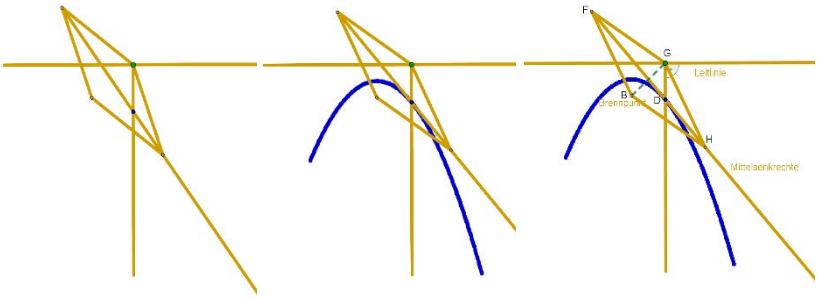


Abb. 4: Ausgangssituation (Bild1); nach Bewegen (Bild 2);
mit Hilfslinien & Beschriftung (Bild3)

Diese drei Ideen bezeichne ich als *gegenständliche Ideen*.[7] In der historischen Abbildung ist aber durch die Dynamisierung noch eine andere Art von Ideen erkennbar. Man kann sie als *Nutzungsidee* bezeichnen. Durch das Einzeichnen der Hände zeigt der Erfinder, wie das Gerät zu gebrauchen ist. Die eingezeichneten Hilfslinien unterstützen gezielt das Entwickeln von *Erklärungsideen* des Betrachters. Durch die zusätzlichen Einzeichnungen erfährt der Betrachter – ohne es ausprobieren zu können oder zu müssen – was, wie und warum das Gerät zeichnet. Dieses ermöglicht es auch heute noch, einen Zugang zur ursprünglichen Verknüpfungsidee des Erfinders zu finden.

Doch warum sollte man sich im heutigen Mathematikunterricht noch mit einem historischen Zeichengerät aus dem 17. Jahrhundert beschäftigen? Was können Schülerinnen und Schüler dabei wie lernen? Diese Fragen will der Artikel nur indirekt beantworten.[8] Hier soll vielmehr den folgenden Fragen nachgegangen werden: Wie lassen sich Schüleraktivitäten mit einer

---

7 Siehe van Randenborgh, 2018.

8 Dazu siehe etwa van Randenborgh, 2012b.

digitalen Simulation des Gerätes beobachten, analysieren und interpretieren? Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede gibt es beim Einsatz eines realen bzw. digitalen Modells? Lassen sich charakteristische Einflüsse einer digitalen Simulation auf Sprache und Vorstellungen der Lernenden finden? Um diesen Aspekten nachzugehen, ist ein theoretischer Rahmen erforderlich, der es erlaubt, die Lernwege genau zu erfassen.

Theoretischer Rahmen für den Einsatz des Parabelzirkels

Zunächst sollen die eben genannten Ideen mit Hilfe des von mir entwickelten *Begriffs des Ideenkonglomerats* systematisiert und erläutert werden. Im Anschluss daran werden Bezüge zum Modell der *instrumentellen Genese* (Rabardel, 2014; 1995) aufgezeigt. Auch der Ansatz der *semiotischen Vermittlung* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) soll kurz vorgestellt werden.

Der Begriff des Ideenkonglomerats

Das Wort *Konglomerat* stammt vom lateinischen Wort *conglomerare*. Es bedeutet „zusammenballen". Daher bezeichnet es in der Geologie ein aus einzelnen, ganz unterschiedlichen Steinbestandteilen zusammengesetztes Gestein. Unter einem *Ideenkonglomerat* verstehe ich also ein aus unterschiedlichen Ideen zusammengesetztes Gebilde. Allerdings ist der Bildungsprozess eines Ideenkonglomerats nicht endgültig abgeschlossen. Denn eine Idee ist immer mit der Wahrnehmung eines Subjekts verbunden. Ein Ideenkonglomerat lässt sich damit folgendermaßen definieren oder umschreiben[9]:

Ein Gebilde oder eine Menge von Ideen, die eine Person in einem Gegenstand (hier: Zeichengerät, allgemein: Artefakt) wahrnimmt und mit ihm verbindet, heißt *Ideenkonglomerat*.

Dabei können bei einem solchen mathematikhaltigen Gegenstand die folgenden *sechs Ideen* unterschieden werden.[10] Diese sind allerdings auch

9 Vgl. van Randenborgh, 2018.

10 Zu den einzelnen Ideen des Parabelzirkels siehe van Randenborgh, 2014; 2015; 2018.

ineinander verwoben. Sie sind vom Subjekt, dem Zeitpunkt und Ort der Begegnung abhängig (s.u.). Es handelt sich um die folgenden Ideen:

- Einsatzidee,
- mechanische oder technische Idee,
- mathematische Idee,
- kulturell-historische Idee,
- Nutzungs- und Erklärungsideen,
- didaktische Idee.

Dabei lassen sich *zwei Arten von Ideen* unterscheiden.

Es gibt Ideen, die im Artefakt manifestiert vorliegen. Sie werden daher von mir als die *gegenständlichen Ideen* bezeichnet. Zu ihnen zählen die *Einsatzidee*, die *mechanische* und die *mathematische Idee*. Dann gibt es Ideen, die in den Gedanken und Vorstellungen einer Person (Subjekt) entstanden sind oder entstehen. Diese nenne ich die *personalen Ideen*. Es handelt sich hierbei um die *Nutzungs- und Erklärungsideen*. Sie sind von der Zeit, der Situation und dem Ort abhängig. Beispielsweise kann die ursprüngliche Nutzungs- und Erklärungsidee des Erfinders als eine personale Idee der Vergangenheit in der Gegenwart als *kulturell-historische Idee* erschlossen werden.

Für den Mathematikunterricht bedeutet dies, dass beim Einsatz eines Artefakts zwischen dem Ideenkonglomerat des Lehrenden und den Ideenkonglomeraten der Lernenden unterschieden werden muss. Denn das Ideenkonglomerat des Lehrenden (*didaktische Idee*) fließt in den Unterricht ein, und die Ideenkonglomerate der Lernenden werden im dort stattfinden Lernprozessen gebildet. Das Subjekt erschließt sich das Artefakt durch Ausprobieren und Erforschen der diesem zugrundeliegenden gegenständlichen Ideen. Hier kommt es dann zur Entwicklung von Nutzungs- und Erklärungsideen. Somit steht ein mathematikhaltiger Gegenstand im Spannungsfeld zwischen (a) den gegenständlichen und den personalen Ideen der Vergangenheit („ist gebildet worden“) und (b) dem Augenblick der Auseinandersetzung und der Entwicklung von personalen Ideen des erforschenden Subjekts („wird gebildet“). Dieser Aspekt wird auch von der Theorie der instrumentellen Genese angesprochen.

Das Modell der instrumentellen Genese

Der Ausgangspunkt für dieses Modell ist die Überlegung, dass ein Instrument nicht einfach gegeben ist, sondern sich in Auseinandersetzung mit dem Gegenstand entwickelt. Es wird daher zwischen einem *Artefakt* und einem *Instrument* unterschieden.[11] Es kommt entscheidend darauf an, dass ein instrumenteller Bezug zwischen dem Artefakt und dem Subjekt gebildet wird, und wie sich dieser gestaltet.[12] Ein Instrument entsteht also erst in einem *wechselseitigen Beeinflussungsprozess* zwischen Artefakt und Nutzer:

> *“Instrumental genesis is a process […] and has two components, the first one (instrumentalisation) directed toward the artefact shaped by the users’ activity, the second one (instrumentation) directed toward the subject (the artefact shaping an user’s activity).”*[13]

Der Begriff *Instrumentation* bezeichnet die Beeinflussungsrichtung vom Gerät zum Nutzer. Mit dem Begriff der *Instrumentalisation* ist dann die umgekehrte Richtung vom Nutzer zum Gerät gekennzeichnet. Hierbei gibt es besondere Einflussfaktoren. Das sind auf der Seite des Geräts die diesem zugrundeliegenden Zwänge (*constraints)* und Möglichkeiten (*potentialities)*. Auf der Seite des Subjekts beeinflussen sein Wissen (*knowledge*) und seine Fertigkeiten (*work method*) diesen Prozess.[14] Daher kann man mit Drijvers et al. (2009) sagen: Ein Instrument ist

> *“the psychological construct of the artefact together with the mental schemes the user develops for specific types of tasks. In such schemes, technical knowledge and domain-specific knowledge (in our case mathematical knowledge) are intertwined.”*[15]

Diese Sichtweise verdeutlicht, dass einer genauen Beobachtung der Tätigkeiten der Lernenden mit dem Artefakt eine besondere Bedeutung

11 So z.B. Schmidt-Thieme & Weigand, 2015; Verillon & Rabardel, 1995; Trouche, 2005.

12 Siehe auch Verillon & Rabardel, 1995.

13 Maschietto & Trouche, 2010, S. 37.

14 So auch Maschietto & Trouche, 2010, S. 37.

15 Drijvers et al., 2009, S. 1349.

zukommt. Hierfür erscheint der Ansatz der semiotischen Vermittlung geeignet zu sein.

Das Modell der semiotischen Vermittlung

Das Modell der semiotischen Vermittlung ist wichtig, um die Zeichen – also Worte, Gesten, Formulierungen, Skizzen etc. – zu erfassen. Bei diesem Ansatz wird ein Artefakt als Vermittlungsgegenstand aufgefasst. Es wird als „tool of semiotic meditation“[16] bezeichnet. In dieser Formulierung wird meines Erachtens deutlich die Vermittlungsfunktion als didaktische Idee des Lehrenden angesprochen. Diese Bezeichnung wird bereits von Bartolini Bussi und Mariotti (2008) verwendet:

> *“In summary, on the one hand, personal meanings are related to the use of the artifact, in particular in relation to the aim of accomplishing the task; on the other hand, mathematical meanings may be related to the artifact and its use. This double semiotic relationship will be named the semiotic potential of an artifact. Because of this double relationship, the artifact may function as a semiotic mediator and not simply as a mediator, but such a function of semiotic mediation is not automatically activated.”*[17]

In diesem Kontext weisen Bartolini Bussi und Mariotti (2008) zu Recht auf die Bedeutung der Lehrkraft und die Art der Orchestrierung hin. Denn ein Prozess einer semiotischen Vermittlung beginnt im Unterricht nicht automatisch, sondern er bedarf einer bewussten Initiierung. Ich sehe im Lehrenden und einer entsprechenden Lernumgebung zwei wesentliche Faktoren. Sie ermöglichen einen Zugang zur Bildung eines Ideenkonglomerats der Lernenden in einem Prozess der instrumentellen Genese. In diesem Prozess nimmt dann ein Artefakt – oder konkret ein Zeichengerät wie der Parabelzirkel – eine entsprechende Vermittlungsfunktion ein. Hierbei entstehen im Unterricht Worte, Formulierungen oder allgemein Zeichen. Diese werden von den Lernenden weiterentwickelt, so dass man sagen kann, dass ein Prozess der Entstehung und Entwicklung von Zeichen stattfindet.

16 Maschietto & Trouche, 2010, S. 38.

17 Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, S. 754.

Einflüsse einer digitalen Simulation auf Sprache und Vorstellungen

Um die Schülertätigkeiten und ihre Lernwege mit einem Artefakt – hier dem Parabelzirkel von van Schooten – zu analysieren, wurde insgesamt 86 Schülerinnen und Schüler zu Beginn der gymnasialen Oberstufe beobachtet. Darüber hinaus wurden 14 leitfadengestützte Interviews geführt. Untersucht wurden drei Klassentypen: So erhielten zwei Klassen ausschließlich reale Modelle, eine Klasse nur digitale und eine Klasse reale und digitale Parabelzirkel zur Auswahl. Die Lernenden sollten dabei in Gruppen- bzw. Partnerarbeit herausfinden, was das Gerät zeichnet. Ferner sollten sie die Funktionsweise erklären.[18]

Im Rahmen dieser Untersuchung konnte festgestellt werden, dass die im Ideenkonglomerat vorhandenen gegenständlichen Ideen die Erforschung des Artefakts und somit die Lernwege der Schülerinnen und Schüler grundlegend beeinflussten. Dabei benutzten die Lernenden unterschiedliche Worte und Formulierungen etc. So konnten *vier Zeichenkategorien* unterschieden werden.[19] Darüber hinaus gab es bestimmte Zeichen, die die Lernwege lenkten. Sie wurde von mir *Trägerzeichen* genannt.[20] Derartige Lernprozesse und diese Art der Zeichengenese konnten beim Unterrichtseinsatz eines realen Zeichengeräts und eines digitalen Modells beobachtet werden. Es gab aber auch Unterschiede. Ein wesentlicher ist der, dass es bestimmte Formulierungen der Lernenden gab, die nur beim digitalen Parabelzirkel auftraten. Bei den Lerngruppen, die nur ein digitales Modell erhielten, gab es einerseits Zeichen, die bei den Lerngruppen, die nur einen realen Parabelzirkel erhielten, nicht gab. Beispiele dafür sind die folgenden Worte: verschiebbarer Punkt, Schieber, Strahl, Spur. Andererseits gab es auch Ausdrücke, die belegen, dass manche Lernenden sich überlegt haben, wie bestimmte Elemente des digitalen Modells in der Realität aussehen würden. Beispielsweise sprachen sie dann von einem Stift oder Schienen.

---

18 Siehe van Randenborgh, 2015, S.99ff.

19 Es wurden *Artefakt-, Schlüssel-, Instrument- und Mathematikzeichen* unterschieden. Siehe dazu: van Randenborgh, 2015, S.114ff. Damit wurden die von Bartolini Bussi und Mariotti (2008, S.756ff) beschriebenen Zeichen um die Kategorie der Instrumentzeichen erweitert.

20 Siehe van Randenborgh, 2015, S.116ff.

Festzustellen war, dass für das Aufdecken der zugrundeliegenden Mathematik, es entscheidend wichtig war, dass die Lernenden die *Zwänge* des Geräts genauer untersuchten und sie diese erklären konnten.[21] Dieses war bei beiden Modellarten so. Dabei konnten sowohl beim Einsatz eines realen als auch eines digitalen Modells *zwei Leitperspektiven* festgestellt werden. Zum einen gab es eine Konzentration der Lernenden auf die Erforschung der Grenzen und Zwänge des Geräts. Zum anderen spielten die Beschäftigung mit den Möglichkeiten und ein Veränderungsdenken („Was wäre, wenn …“) eine leitende Rolle. Beim digitalen Parabelzirkel konnten speziell die folgenden *vier Instrumentalisationstypen* unterschieden werden: Typ 1 »DGS-Grenzen & DGS-Möglichkeiten«, Typ 2 »Zwänge aufgedeckt«, Typ 3 »Grenzen und Zwänge« und Typ 4, der als ein »Wechseltyp« zwischen Typ 1 und 2 beschrieben werden kann. Dabei war festzustellen, dass die unterschiedlichen Typen auch verschiedene Vorstellungen der Lernenden vom Artefakt (Parabelzirkel) wiederspiegeln. Diese können vom Beobachter an den gefunden gegenständlichen Ideen und vor allem an den von den Lernenden gebildeten Nutzungs- und Erklärungsideen erkannt werden. Letztlich ist an dieser Bildung des Ideenkonglomerats der Lernenden erkennbar, ob der Prozess der instrumentellen Genese des Zeichengeräts zu einem Instrument der Wissensaneignung erfolgreich war.

Ideen und Vorstellungen des Typs »DGS-Grenzen & DGS-Möglichkeiten«

Die Schülerinnen und Schüler dieses ersten Typs konnten die Einsatzidee und die mechanische Idee erkennen.

Das Aufdecken der mathematischen Idee gelang nur ansatzweise. Es fand keine Verknüpfung der gegenständlichen Ideen statt. Mit Blick auf die gebildeten Nutzungs- und Erklärungsideen ließ sich beobachten, dass die DGS–Konstruktion der Raute analysiert wurde. Die Raute wurde also nicht als ein gegebener Bestandteil der mechanischen Idee wahrgenommen und als konstruktiv für die Bauweise des Parabelzirkels angesehen. Den Lernenden dieses Typs war es daher auch nicht möglich, zum Abstandsbe-

21 Zum Begriff des Zwangs und der Abgrenzung gegenüber dem der Grenze siehe van Randenborgh, 2018.

griff zu gelangen. Somit konnte auch nur von einer ansatzweise stattgefunden instrumentellen Wissensaneignung gesprochen werden. Bei Lernenden dieses Typs wurde die *DGS-Konstruktion* der auf dem Bildschirm zu sehenden Dinge untersucht.

Ideen und Vorstellungen des Typs »Zwänge aufgedeckt«

Hier gelangten die Lernenden bei ihrer instrumentellen Wissensaneignung schon weiter. Die gegenständlichen Ideen wurden entdeckt und miteinander verknüpft. Allerdings wurde die mathematische Idee nur teilweise aufgedeckt. Auch der Abstandsbegriff wurde nicht vollständig erfasst. Die Nutzungs- und Erklärungsideen zeigen, dass die Raute als Bestandteil des Parabelzirkels erfasst wurde. Die mechanisch-technische Bedeutung der Raute wurde erkannt. So wurde mehr als die DGS-Konstruktion untersucht, aber die Lernenden betrachteten den digitalen Parabelzirkel nicht als einen digitalen Nachbau eines mathematikhaltigen Gegenstandes. In dem Artefakt wurde eher eine Art *virtueller Parabelzirkel* gesehen, der keine Bezüge zur mathematischen oder realen Welt hat.

Ideen und Vorstellungen des Typs »Grenzen und Zwänge«

Hier gelang die instrumentelle Genese vollständig. Der Abstandbegriff wurde in seiner zentralen Bedeutung für die dem Gerät zugrundeliegende Mathematik erfasst. Die einzelnen Ideen wurden miteinander verknüpft. Die Raute wurde als Bestandteil des digitalen Parabelzirkels aufgefasst. Bei manchen Lernenden gab es einen Vorstellungsvergleich mit einem gedachten realen Modell (digital – real). Hier kann man sagen, dass die Lernenden dieses Typs die Vorstellung einer *digitalen Simulation* hatten. Denn sie betrachteten das digitale Modell als ein Modell für ein Zeichengerät mit einer besonderen mathematischen Idee, mit dem man Parabeln auf eine bestimmte Art und Weise erzeugen kann. Das Aufdecken der Funktionsweise und des Zusammenhangs zur Konstruktion (Bauweise) führte zur verborgenen Mathematik der Simulation.

Fazit: Wichtige Einflussfaktoren für erfolgreiches Mathematiklernen mit einer digitalen Simulation

Zunächst ist festzuhalten, dass Lernende, die ein digitales Modell im Unterricht erforscht haben, teilweise andere Worte und Formulierungen verwendet haben. Es gab also einen Einfluss der digitalen Lernumgebung auf die *Zeichen und Sprache* der Lernenden. Beispielsweise taten die Worte „Spur“, „verschiebbarer Punkt“ oder „Schieber“ nur bei den Lerngruppen auf, die eine digitale Simulation untersucht haben. Häufig war auch eine Art *dynamische Sicht* festzustellen. Es gab dynamische Beschreibungen auf der Handlungsebene, v.a. beim Typ 1 und 2. Bei Lernenden des ersten Typs kam das z.B. in Formulierungen, wie „beim Bewegen“ oder „durch das Schieben“ zum Ausdruck. Lernende des Typs 2 formulierten z.B. „… ändert die Raute ihre Form“ oder „… bleibt die ganze Zeit auf der Diagonalen“, wenn sie sich Bewegungsvorgänge vorstellten.

Hinzuweisen ist auch auf die spezifischen *Veränderungsmöglichkeiten* des Artefakts. So wurden von den Schülerinnen und Schülern beim digitalen Parabelzirkel z.B. Strecken durch Geraden ersetzt oder es wurde die Spur bzw. Ortslinie von anderen Objekten untersucht.

Mit Blick auf einen erfolgreichen Prozess der instrumentellen Wissens-aneignung[22] mit einer digitalen Simulation, bei dem das Artefakt, in dem die zugrundeliegende Mathematik verborgen ist, zu einem Instrument geworden ist, in dem die Lernenden die mathematische Idee des Artefakts aufgedeckt und sich erschlossen haben, sind zwei Aspekte zentral:

1. Wahrnehmen als digitale Simulation: Die digitale Simulation muss zunächst erst einmal von den Lernenden als solche wahrgenommen werden (wie beim Typ »Grenzen und Zwänge«). Es geht letztlich darum zu klären, was das Artefakt überhaupt ist. Wenn die Lernenden die gesamte DGS-Konstruktion als solche untersucht haben (wie beim Typ 1) oder den digitalen Parabelzirkel als eine Art virtuelles Objekt aufgefasst haben (wie beim Typ 2) konnten sie nicht zur mathematischen Idee gelangen.

Das bedeutet also, dass eine Simulation nicht a priori gegeben ist. Sie entsteht vielmehr erst durch die Wahrnehmung eines Subjekts.

2. Grenzen, Zwänge und Möglichkeiten untersuchen: Die Lernenden müssen Grenzen, Zwänge und Möglichkeiten der digitalen Simulation erkennen und vor allem die Zwänge weiter erforschen, da erst dieses zur verborgenen Mathematik führt.

22 Zum Begriff siehe van Randenborgh, 2015, S.142ff.

Zusätzlich hilfreich war es, wenn die Lernenden Vorstellungen davon entwickelten, wie bestimmte Elemente der digitalen Simulation real bzw. physisch aussehen würden. Dieser *Abgleich von real und digital* führte auch zu weiterführenden Gedanken über die digitale Simulation. Beispielsweise wurden so bestimmte Grenzen des digitalen Parabelzirkels (z.B. Zeichenbereich) oder auch Phänomene der Software (z.B. bestimmte Strecken erscheinen manchmal verkürzt) hinterfragt und erklärt.

Diese Aspekte können zusammenfassend als entscheidend dafür angesehen werden, ob Schülerinnen und Schüler erfolgreich Mathematik mit einer digitalen Simulation lernen. Förderlich in diesen Lernprozessen war es, wenn die Lernenden sich Vorstellungen davon gemacht haben, wie bestimmte Elemente oder Phänomene der digitalen Simulation in der realen bzw. physikalisch-gegenständlichen Welt aussehen würden. Die Ausbildung solcher Vorstellungen kann durch die Präsenz eines realen Modells oder einer (historischen) Abbildung unterstützt werden.[23] Gerade der *Vorstellungsabgleich zwischen real und digital* kann zu tieferen Einsichten in die Bau- und Funktionsweise der (digitalen) Simulation, der benutzten DGS und der zugrundeliegenden Mathematik führen.

Literatur

Bartolini Bussi, M.G. (2001). The Geometry of Drawing Instruments: Arguments for a didactical use of real and virtual copies. In Cubo Matemática Educacional Vol. 3 (2), 27-54.

Bartolini Bussi, M.G. & Mariotti, M.A. (2008). Semiotic meditation in the mathematics classroom. In L. Englisch (Hrsg.), Handbook of international research in mathematics education (S.746-783, 2. Auflage). New York: Taylor & Francis.

Drijvers, P.; Doorman, M.; Boon, P. & van Gisbergen, S. (2009). Instrumental orchestration: theory and practice. In V. Durand-Guerrier et al. (Hrsg.), Proceedings of CERME 6 (S.1349-1358). Lyon.

Maschietto, M. & Trouche, L (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. In ZDM Mathematics Education 42, 33-47.

23Siehe van Randenborgh 2015, S.151ff.

Rabardel, P. (2014). Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin, pp.239, (zuerst 1995, dann überarbeitet 2002; 2014).

van Randenborgh, Chr. (2018). Mathematiklernen beim Einsatz eines mathematischen Instruments. Das Wahrnehmen von Ideen und die Entwicklung eines Ideenkonglomerats am Beispiel des Parabelzirkels von Frans van Schooten; in: mathematica didactica 41(2018)

van Randenborgh, Chr. (2015). Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematikunterricht. Der Prozess der Instrumentellen Genese von historischen Zeichengeräten. Wiesbaden: Springer.

van Randenborgh, Chr. (2014). Mathematische Instrumente erforschen – ein Ideenkonglomerat entdecken. MU – Der Mathematikunterricht 60 (6), 56-61.

van Randenborgh, Chr. (2012a). Frans van Schootens Beitrag zu Descartes Discours de la méthode. Mathematische Semesterberichte Vol. 59 (2), 223-241.

van Randenborgh, Chr. (2012b). Parabelzirkel real und digital. Wissensaneignung durch Modelle und Simulationen. Mathematik lehren 174, 11-14

Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (2015). Medien. In R. Bruder et al. (Hrsg.), Handbuch der Mathematikdidaktik (S.461-490). Berlin; Heidelberg: Springer.

van Schooten, F. (1646). Francisci à Schooten Leydensis, De organica conicarum sectionum in plano descriptione. Leiden: Ex Officina Elzeviriorum.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments. In D. Guin; K. Ruthven & L. Trouche (Hrsg.), The didactical challenge of symbolic calculators (S.137-162). New York: Springer.

Verillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. In European Journal of Psychology of Education Vol. X (1), 77-101.

Adressen der Autoren

Prof. Dr. Bärbel Barzel	Universität Duisburg-Essen Fakultät für Mathematik Thea-Leymann-Straße 9 D-45127 Essen baerbel.barzel@uni-due.de
Assoc. Prof. Dr. Nils Buchholtz	Department of Teacher Education and School Research University of Oslo Postboks 1099 Blindern 0317 Oslo, Norway N.f.buchholtz@ils.uio.no
Hans-Jürgen Elschenbroich	Kirchstr. 26 41352 Korschenbroich elschenbroich@t-online.de
Fabian Grünig	Forschungs- und Nachwuchskolleg EKoL Pädagogische Hochschule Heidelberg Im Neuenheimer Feld 561 69120 Heidelberg gruenig@ph-heidelberg.de
Dr. Corinna Hankeln	Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik Westfälische Wilhelms-Universität Münster Fliednerstraße 21 48149 Münster c.hankeln@uni-muenster.de
Elena Jedtke	Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik Westfälische Wilhelms-Universität Münster Fliednerstraße 21 48149 Münster e.jedtke@uni-muenster.de

Dr. Marcel Klinger	Universität Duisburg-Essen Fakultät für Mathematik Thea-Leymann-Str. 9 45127 Essen marcel.klinger@uni-due.de
Prof. Dr. Anke Lindmeier	Didaktik der Mathematik IPN – Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik Olshausenstraße 62 24118 Kiel lindmeier@ipn.uni-kiel.de
Dr. Bernhard Matter	Pädagogische Hochschule Graubünden Leiter Ressort Schule und Technik Scalärastrasse 17 7000 Chur bernhard.matter@phgr.ch
Prof. Dr. Reinhard Oldenburg	Institut für Mathematik Universität Augsburg Universitätsstr. 14 86159 Augsburg reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de
Anje Ostermann	Didaktik der Mathematik IPN – Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik Olshausenstraße 62 24118 Kiel ostermann@ipn.uni-kiel.de
Dr. Melanie Platz	Universität Siegen Abteilung Didaktik der Mathematik Herrengarten 3 57072 Siegen platz@mathematik.uni-siegen.de

Dr. Christian van Randenborgh	Zentrum für schulpraktische Lehrerausbildung, Gymnasium/Gesamtschule Herforder Str. 14 33602 Bielefeld christian.van_randenborgh@uni-bielefeld.de
Dr. Daniela Schiefeneder	Universität Innsbruck Institut für Mathematik Technikerstraße 13 A-6020 Innsbruck daniela.schiefeneder@uibk.ac.at
Dr. Florian Stampfer	Institut für Fachdidaktik Universität Innsbruck Technikerstraße 25 6020 Innsbruck (Österreich) florian.stampfer@uibk.ac.at
Prof. Dr. Markus Vogel	Institut für Mathematik und Informatik Pädagogische Hochschule Heidelberg Im Neuenheimer Feld 561 69120 Heidelberg vogel@ph-heidelberg.de